İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ BİLİŞİM ENSTİTÜSÜ

UYUMLU SALINICININ DOĞRUSAL İKİKUTUP İŞLEVLİ, İKİNCİ DERECE EREK VE YAPTIRIM TERİMLİ ENİYİLEMELİ DENETİM DENKLEMLERİNİN ELDE EDİLMESİ VE ÇÖZÜLMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Burcu TUNGA

Anabilim Dalı : Bilişim

Programı : Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik

Ocak 2004

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ BİLİŞİM ENSTİTÜSÜ

UYUMLU SALINICININ DOĞRUSAL İKİKUTUP İŞLEVLİ, İKİNCİ DERECE EREK VE YAPTIRIM TERİMLİ ENİYİLEMELİ DENETİM DENKLEMLERİNİN ELDE EDİLMESİ VE ÇÖZÜLMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Burcu TUNGA

702011023

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 5 Aralık 2003
Tezin Savunulduğu Tarih : 13 Ocak 2004

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Metin DEMİRALP
Diğer Jüri Üyeleri : Doç. Dr. N. Abdülbaki BAYKARA (M.Ü)
Doç. Dr. Ulviye Başer (İ.T.Ü)

Ocak 2004

ÖNSÖZ

Lisans eğitimimin ilk günlerinden başlayarak beni her zaman destekleyen, bu tezin her aşamasında benden yardımlarını esirgemeyen, tüm bilgi birikimini gereksinim duyduğumuz her anda bizlere aktaran değerli hocam Prof.Dr. Metin Demiralp'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, bilimsel çalışmalarımızı birlikte yürüttüğümüz Tülin Kaman ile diğer arkadaşlarıma, bu araştırmalar için gerekli ortamı sağlayan Bilişim Enstitüsü Müdürlüğü'ne, bana her zaman destek olan sevgili eşime ve aileme teşekkür ederim.

Aralık 2003 Burcu TUNGA

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

H	Dizgenin (Sistemin) Hamiltonyeni
H_0	Yalın haldeki dizgenin Hamiltonyeni
ψ	Dalga işlevi (fonksiyonu)
λ	Eşdüzey işlevi
μ	İki kutuplu işlev
$E(t)$	Dış alan genliği
U	Evrim işleci (operatörü)
I	Birim işleç
$\mathbf{0}$	Sıfır matrisi

ÖZET

Bu çalışmada bir boyutlu kuvantum uyumlu salınıcının eniyilemeli denetimi sorunu ile ilgilenilmiştir. Dizgenin doğrusal ikikutup işlevli (dipole function) bir lazer alanı altında olduğu varsayılmış, erek ve yaptırım terimlerinde içerilen işleçlerin (operatör) konum ve momentum işleçlerine göre en çok ikinci dereceden oldukları öngörülmüştür. Çalışmada öncelikle eniyilemeli denetim denklemleri elde edilmiş, daha sonra elde edilen bu denklemler iki ayrı yöntem kullanılarak çözülmüştür.

Kullanılan yöntemlerden ilki saptırım açılımıdır. Eniyilemeli denetim denklemleri bu yöntem ile çözülürken güçsüz alan varsayımı yapılmış ve saptırım açılımında yalnızca sıfırıncı ve birinci basamaktan terimler alıkonulmuştur. Yani, güçsüz alan varsayımı altında ileri doğru evrimi betimleyen ψ dalga işlevi ile geriye doğru evrimi betimleyen λ eşdüzey işlevinin birinci basamaktan yaklaştırımları yapılmış ve bu yaklaştırımlar kullanılarak amaçlanan çözüme ulaşılmıştır. Saptırım açılımında sıralama değiştirgeni (parametresi) olarak, yaklaştırım elde edildiğinde değeri 1 olarak alınacak olan, denklemlere dış alan genlik işlevini ölçekleyecek biçimde yerleştirilen yapay bir değişkenden yararlanılmış yani Neumann türü bir saptırım açılımı gerçekleştirilmiştir.

Kullanılan ikinci yöntem işleçler cebri ile indirgeme tabanlıdır. Bu yöntem dizgenin kendisinde varolan evrim işleçlerinin (evolution operators) matrisler türünden yazılarak analitik olarak kolayca yapılamayan işlemlerin dolaylı ama daha kolay olarak gerçekleştirilmesine dayanır. Evrim işleçlerinin matris gösterilimlerinin elde edilebilmesi için önce evrim işleçleri çarpanlara ayrılarak çok boyutlu uzayda dönmeye karşı gelen birimsel işleçler elde edilir ve bu birimsel işleçler üzerinden üstel matrislere ulaşılır. Bu yöntemde güçsüz alan varsayımı kullanılmamış ve dış alan genliğine ait saptırım açılımları yöntemi ile elde edilen doğrusal terimlerin yanısıra üçüncü dereceden terimlerin de içerildiği doğrusal olmayan kesin bir denkleme ulaşılmıştır.

Böylece, her iki yöntemle de elde edilen denetim denklemleri bilinmeyen olarak yalnızca dış alan genliğini içeren tümlevli denklemler yapısında ortaya çıkmıştır. Bu denklemler, saptırım açılımı durumunda, kolayca sayılabilecek biçimde, iki koşulu dizge ile dış alan etkileşiminin başında, diğer iki

koşulu ise aynı etkileşimin son anında verilen, dördüncü dereceden türevli denkleme dönüştürülebilmektedir. Değişmez katsayılı bu denklem zorlanmadan çözülebilmektedir.

Doğrusal olmayan kesin denklem durumunda denklemin sıradan türevli biçime getirilmesi yine de mümkün olabilmekte ancak elde edilen denklem doğrusal olmadığından kesin çözüm bir çırpıda elde edilememektedir. Bunun yerine çok yakında geliştirilen bir yöntemden, etkileşim süresine göre açılım yönteminden yararlanılmaktadır. Tezde bu açılımın yalnızca ilk baskın terimi verilmiş ve çözüm sırasında çok önemli özgün bulgular elde edilerek kuvantum uyumlu salınıcının eniyilemeli denetimine doğrusal olmayan durumlar için önemli bir katkı yapılmış olunmaktadır.

SUMMARY

In this work, we deal with optimal control of one dimensional quantum harmonic oscillator. It is assumed that the system is under an external field characterized by a linear dipole function. It is also assumed that the operators appearing in the objective and the penalty terms are at most second degree with respect to the state and the momentum operators. Firstly, optimal control equations are obtained. Then, these equations are solved by using two different methods.

One of these methods is the perturbation expansion method. When the optimal control equations are solved by using this method it is assumed that there is a weak field and under this assumption only the zeroth and the first order terms are kept in the perturbation expansion. In other words, the weak field assumption enables us to develop a first order perturbation approach to get approximate solutions to the wave function, ψ and the costate function, λ and by using these approximations the aimed solutions are obtained. An artificial parameter, which is placed into the equations to satisfy the scaling of the external field, is used as an order parameter in the perturbation expansion. This parameter will be set equal to 1 when the approximation is obtained. Therefore, a Neumann type perturbation expansion is taken into consideration.

The other method is based on the reduction using operator algebra. This method allows us to rewrite the evolution operators, appearing in the system, in terms of several matrices in order to be able to obtain the solutions of the problems which can not be easily solved analytically. To be able to obtain the matrix forms of the evolution operators, first the multiplicative terms of these operators are obtained for constructing the unitary operators corresponding to the rotation in the high dimensional space and by using these unitary operators the exponential matrices are obtained. Weak field assumption is not used in this method, and furthermore, in addition to linear terms obtained from perturbation expansion cubic terms are also determined.

Hence, the control equations determined through these two methods appeared in the structure of integral equations including only the external field as an unknown. When the perturbation expansion method is used these equations

can be easily transformed to the fourth order differential equation whose two conditions are given at the beginning instant of the interaction between the system and the external field, and the other two conditions are given at the final instant of the same interaction. This equation with constant coefficients can be easily solved.

When the nonlinear exact equation is used, the transformation of the equation to the ordinary differential equation is also available but the solution cannot be evaluated easily because of the nonlinear structure of the obtained equation. Instead of this method, a recently developed method which is an expansion with respect to the interaction time can be used. In this thesis, only the first dominant term of the expansion is given and some very important peculiar findings are obtained during the solution. Using these findings important contributions are made for the optimal control of the harmonic oscillator in the nonlinear cases.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Çalışmanın Amacı

Bu çalışmada $t \in [0, T]$ ile gösterilen bir zaman diliminde dizgeye etkiyen elektiriksel dış alan kuvveti ve zamandan bağımsız bir doğrusal μ ikikutup işlevi (fonksiyonu) altındaki uyumlu (harmonik) salınıcının eniyilemeli denetiminin (optimal kontrol) gerçekleştirilmesi amaçlanmıştır.

Bu amacın gerçekleştirilebilmesi için öncelikle eniyilemeli denetim denklemleri oluşturulmalıdır. Bu denklemlerin oluşturulması için ise amaç işlevsisi (fonksiyoneli) elde edilmeli ve birinci varyasyonu sıfıra eşitlenmelidir. Bunu izleyen adımda, ortaya çıkan eniyilemeli denetim denklemlerinin çözülmesi amaçlanmaktadır.

Çözüm yollarından ilki saptırım açılımı yöntemi olarak önerilmektedir. Bu yöntemde dizgeyi ileriye taşıyan dalga işlevi ve geriye taşıyan eşdüzey işlevi (costate function) saptırım açılımları yönteminden yararlanılarak, güçsüz alan varsayımı altında, en çok birinci basamaktan terimler içerecek biçimde, seriye açılarak çözüme ulaşılabilir.

Bir diğer çözüm yolu olarak, M. Demiralp[1-7] tarafından geliştirilen işleçler cebri ile indirgeme yöntemi ele alınabilir. Bu yöntemde kullanılan taban öge evrim işleçlerinin (evolution operator) çarpanlara ayrılması işlemidir. Evrim işleçlerinin çarpanlara ayrılması sonucu elde edilen üstel matrisler türünden yazılan denetim ve erişim denklemleri kullanarak çözüme oldukça kolay bir biçimde ulaşılması erek olarak alınmaktadır.

1.2 Kuvantum Dinamiği'ne Giriş

Kuvantum Dinamiği'nde, çevresinden yalıtılmış bir dizgenin devinimini zamandan bağımsız Schrödinger denklemi betimler. Bu denklem zaman değişkenine göre birinci basamaktan bir türevli denklem olup bir başlangıç değer sorunu olarak tanımlanır. Denklem aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x_1, ..., x_n, t)}{\partial t} = H\psi(x_1, ..., x_n) \tag{1.1}$$

$$\psi(x_1, ..., x_n, 0) = f(x_1, ..., x_n) \tag{1.2}$$

Burada $\hbar$ indirgenmiş Planck değişmezini yani h ile gösterilen ve değeri dizgelere bağımlı olmayan evrensel bir değişmezin 2π'ye oranını göstermekte olup dizgenin özgürlük düzeyi yani devinimini konumsal tabanda betimleyen değişkenlerin sayısı artı tamsayı olduğu varsayılan n ile, zaman değiştirgeni ise t ile simgelenmektedir. $\psi(x_1, ..., x_n, t)$ dizgenin dalga işlevini (wavefunction) göstermektedir. Bu işlevin kendi eşleniği ile çarpımı tüm konum değişkenlerinin diferansiyellerinin çarpımı ile çarpıldığında dizgenin belli bir anda ve konumda bulunma olasılığını verecektir. Bu nedenle, işlevin genlik karesi tümlevlenebilir olması ve bunun için de, eğer konum değişkenleri sonsuza gidebiliyorsa, bu uçlarda dalga işlevinin yeterince ivmeli olarak sıfıra gitmesi gerekir. Olasılık betimlemesi nedeniyle dalga işlevinin aşağıdaki eşitliği de sağlaması gerekir.

$$\int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \psi^*(x_1, ..., x_n, t)\psi(x_1, ..., x_n, t) = 1 \tag{1.3}$$

Burada $\mathcal{V}$ ile konum değişkenlerinin alabildiği değer kümelerinin kartezyen çarpımıyla oluşturulan tanım bölgesi, $d\mathcal{V}$ ile ise bu tanım bölgesi içinde sonsuz küçük bir bölge gösterilmektedir.

(1.1) denkleminde H ile dizgenin Hamiltonyen'i gösterilmektedir. Bir işleç olan bu büyüklük genelde devimsel erke (kinetik enerji) terimi ile gizilgüç (potansiyel enerji) terimlerinin toplamı olarak tanımlanır. Devimsel erke terimi konum değişkenlerine göre türevleme terimlerini ve konum değişkenlerini içerir. Diğer bir deyişle konum yanısıra momentum değişkenlerini de içerebilir.

Gizilgüç terimi ise genelde yalnızca konum değişkenlerine bağımlı olan işlevlerle gösterilir. Genellikle, ilgilenilen dizgeler elektrik yüklü parçacıklardan oluştuğundan, dış etkileşim kaynağının da elektromanyetik bir alan olarak düşünülmesi söz konusudur. Elektromanyetik alanlar, Maxwell Kuramı'na göre, ölçekleyici (scalar) bir alanla yöneysel (vector) bir alanın bileşkesi olarak tanımlanırlar. Bu genel tanımlamada, ölçekleyici alan elektriksel tabanlı, yöneysel alan ise manyetik tabanlı etkileşimleri betimlerler. Manyetik alanlar erke (energy) düzeyi yüksek olan ya da güçlü olarak nitelendirilebilen etkileşimleri betimlerler. Elektriksel alanlar ise daha az erkesi olan etkileşimleri yani güçsüz etkileşimleri betimlerler. Bu çalışmada, güçsüz alanlarla ilgilendiğimiz öngörüldüğünden etkileşimin salt elektriksel tabanlı olduğu varsayılacaktır.

1.3 Hamilton İşlecinin Üstel İşleç Biçiminde Yazılması

Çevresinden yalıtılmış olan bir dizgenin toplam erkesi değişmez kalacağından Hamilton işleci zamandan bağımsız olmalıdır.

(1.1) denkleminde sözü edilmesi gereken diğer bir terim de başlangıç koşulunda verilen $f(x_1,...,x_n)$ işlevidir. Bu da, verilen yani açık yapısı bilinen bir işlev olarak düşünülmekte olup dizgenin dalga işlevinin sağladığı özelikleri sağlaması gerekir. Yani, dalga işlevi karesi tümlevlenebilen Hilbert uzayından seçilmektedir.

(1.1) denklemi göreli türevli (partial derivative) bir denklem olup bir evrim tanımlamaktadır. Dizge Hamiltonyeni'nin açık yapısı verilmedikçe denklemin nasıl çözülebileceği konusunda adım atmak, alışılmış yöntemlerle pek olanaklı olmayabilir. Ama H'nin açık yapısını kullanmaksızın biçimsel bir çözüm üretmek olanaklıdır. Bunu gösterebilmek için önce (1.1) denklemini aşağıdaki biçimde yeniden yazmak gerekir.

$$\frac{\partial\psi(x_1,....,x_n,t)}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}H\psi(x_1,...,x_n) \tag{1.4}$$

$$\psi(x_1,...,x_n,0) = f(x_1,...,x_n) \tag{1.5}$$

Eğer (1.4) eşitliğinde $t = 0$ yerleştirilecek olur ve Hamiltonyen'in zamandan bağımsız olduğu düşünülürse

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{t=0} = -\frac{i}{\hbar}H\left(\psi\right)_{t=0} \tag{1.6}$$

ve dalga işlevinin (1.5) eşitliğiyle verilen başlangıçtaki değeri kullanılırsa

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{t=0} = -\frac{i}{\hbar}Hf \tag{1.7}$$

yazılabilir. (1.6) ve (1.7)'de yalınlık sağlamak amacıyla, işlevlerin nelere bağımlı oldukları açık olarak gösterilmemektedir.

(1.1) ve (1.6) eşitlikleri zaman ve konum değişkenlerinin tüm değerleri için geçerlidirler, yani özdeşlik niteliklidirler. Bu nedenle, bu eşitliklerin her iki yanı bir ya da birden çok sayıda değişkene göre, özdeşliği bozmaksızın türevlenebilirler. (1.6) eşitliğinin her iki yanı zamana göre bir kez türevlenecek olursa

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)_{t=0} = -\frac{i}{\hbar}H\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{t=0} \tag{1.8}$$

ve sağ yanda (1.7) eşitliğini kullanarak

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)_{t=0} = \left(-\frac{i}{\hbar}H\right)^2 f \tag{1.9}$$

elde edilir. (1.7) ve (1.9) eşitlikleri daha genel olan aşağıdaki eşitliğin yazılabileceğini akla getirir.

$$\left(\frac{\partial^k\psi}{\partial t^k}\right)_{t=0} = \left(-\frac{i}{\hbar}H\right)^k f \tag{1.10}$$

Burada H^0 büyüklüğünün I ile gösterilecek birim işleç olduğu öngörülmektedir. Bu eşitliğin doğruluğunu kanıtlamak için matematiksel tümevarım ilkesinden yararlanılabilir. Bu amaçla (1.6) eşitliğinin her iki yanı, artı bir tamsayı olarak öngörülen k değerinde ardışık olarak zamana göre türevlenecek olursa

$$\left(\frac{\partial^{k+1}\psi}{\partial t^{k+1}}\right)_{t=0} = -\frac{i}{\hbar} H \left(\frac{\partial^{k}\psi}{\partial t^{k}}\right)_{t=0} \tag{1.11}$$

yazılabilir. (1.10) eşitliğinin doğruluğu k'nın 0, 1, ve 2 değerleri için bilinmektedir. Dolayısıyla tümevarım ilkesindeki sınama aşaması gerçeklenmiş durumdadır. Yineleme aşamasında ise (1.10)'un 2'den büyük de olabilen herhangi bir k değeri için doğru olduğu varsayılırsa (1.11) eşitliğinin sağ yanında kullanılarak

$$\left(\frac{\partial^{k+1}\psi}{\partial t^{k+1}}\right)_{t=0} = \left(-\frac{i}{\hbar} H\right)^{k+1} f \tag{1.12}$$

elde edilebilir ki bu da, aslında, (1.10) eşitliğinin k yerine $(k+1)$ alınmış biçiminden başka bir şey değildir. Böylece (1.10)'un k'nın tüm doğal sayı değerleri için geçerli olduğu kanıtlanmış olur.

Artık (1.10)'dan yararlanarak (1.1) denkleminin biçimsel çözümü yazılabilir. Bu amaçla önce, aşağıdaki biçimde, dalga işlevinin zamana göre McLaurin açılımının yazılması gerekir.

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left(\frac{\partial^{k}\psi}{\partial t^{k}}\right)_{t=0} \tag{1.13}$$

Buradaki türev değerleri yerine (1.10)'daki karşılıkları yazılacak olursa

$$\psi(x_1, ..., x_n, t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{it}{\hbar}\right)^k H^k\right) f(x_1, ..., x_n) \tag{1.14}$$

elde edilir. Burada f üzerine etki eden ve sonsuz toplam olarak verilen işleç biçimsel olarak aşağıdaki eşitlikle tanımlanan bir üstel işlece eşdeğerdir.

$$\mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H} \equiv \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{it}{\hbar}\right)^k H^k\right) \tag{1.15}$$

Dolayısıyla (1.1) denkleminin aynı denklemde verilen başlangıç koşulunu sağlayan biçimsel çözümü aşağıda verilen eşitlikteki yapıdadır.

$$\psi(x_1, ..., x_n, t) = \mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H} f(x_1, ..., x_n) \tag{1.16}$$

Bu biçimsel yapı her ne kadar işleç türünden somut ve açık biçimdeyse de uygulamada gerçek sonucun elde edilmesi için yukarıda gözüken üstel işlecin $f(x_1, ..., x_n)$ üzerine etkisinin açık olarak belirlenmesi kolay olmayabilir. Çünkü burada H işlecinin artı tamsayı kuvvetlerinin etkilerinin açık olarak belirlenmesi ve ondan sonra da ilgili sonsuz toplamda yerine konularak toplamın belirlenmesi gerekmektedir.

(1.15) eşitliğiyle tanımlanan üstel işleç bir evrim tanımladığından **Üstel Evrim İşleci** olarak adlandırılabilir. Bu işleç için

$$\mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H}\mathrm{e}^{\frac{it}{\hbar}H} = \mathrm{e}^{\frac{it}{\hbar}H}\mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H} = I \tag{1.17}$$

eşitliği geçerlidir. Bu eşitliğin doğruluğunu kanıtlamak için (1.15)'te gözüken sonsuz toplamdan aşağıdaki şekilde yararlanılabilir.

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(-\frac{it}{\hbar}\right)^{j}H^{j}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{it}{\hbar}\right)^{k}H^{k}\right) = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{k!}\left(-\frac{it}{\hbar}\right)^{k}\frac{1}{(j-k)!}\left(\frac{it}{\hbar}\right)^{j-k}\right)H^{j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{j}\frac{(-1)^{k}}{k!}\frac{1}{(j-k)!}\right)\left(\frac{it}{\hbar}\right)^{j}H^{j} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(-1)^{k}\right)\left(\frac{it}{\hbar}\right)^{j}H^{j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(1+(-1))^{j}}{j!}\left(\frac{it}{\hbar}\right)^{j}H^{j} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\delta_{j0}}{j!}\left(\frac{it}{\hbar}\right)^{j}H^{j} = H^{0} = I
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Burada δ_{j0} Kroenecker'in delta simgesini göstermekte olup kuvvet serilerinin çarpımında kullanılan Cauchy çarpım kuralından yararlanılmıştır.

1.4 Dirac'ın Braket Gösterilimi

Eniyileme Kuramı'nda öngörüldüğü üzere bir amaç işlevsisi (functional) tanımlamak gerekir. Bu bağlamda, işlevsinin tümünü bir çırpıda vermek yerine toplamsal ögelerinden sözederek tümlemeye geçmek daha yerindedir. Öncelikle Amaç Terimi'nin (objective term) tanımı verilebilir. Bu tanımlama için önce Beklenen Değer tanımından sözetmek gerekir. İngilizce'de "Expectation Value "olarak adlandırılan tanım bir işleç gerektirir. Kuvantum dünyasında, gözlenebilen büyüklüklerin her biri bir işleç ile betimlenir. Sözgelimi, konum betimleyen değişkenlerin her biri ve bunlara bağımlı olan işlevler aslında birer cebirsel işleç olarak betimlenirler. Momentum değişkenleri ise ilgili oldukları konum değişkenine göre türevleme işleçleri olarak ortaya çıkarlar. Erke ve zamana göre türevleme arasında da benzer bir ilişki vardır. $\hat{\mathcal{O}}$ ile simgelenen bir işlecin beklenen değeri $\left\langle\hat{\mathcal{O}}\right\rangle$ olarak simgelenir ve ilgilenilen dizgenin dalga işlevi üzerinden aşağıdaki biçimde tanımlanır.

$$\left\langle\hat{\mathcal{O}}\right\rangle \equiv \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V}\psi^{*}(x_1,...,x_n,t)\hat{\mathcal{O}}\psi(x_1,...,x_n,t) \tag{1.19}$$

Burada $\mathcal{V}$ ile konum değişkenlerinin değer alabildiği küme simgelenmektedir. Son bağıntıdan anlaşılacağı üzere beklenen değerler zamanla değişebilmektedir.

Son bağıntıyı daha kısa bir gösterilimle yazabilmek için **bra** ve **ket** kavramlarından yararlanmak gerekir. Bilindiği gibi işlevler ya bir tanım bölgesinden bir değer bölgesine geçiş kuralı aracılığıyla ya da çizelge biçiminde verilirler. Çizelge biçimli tanımlamada her bir tanım bölgesi ögesine işlevin ürettiği değer karşılık getirilecek biçimde sıralardan oluşan bir yapı verilir. Bu durum bir yöneyin sıralama sayısına karşılık elemanını veren bir çizelge gibidir. Sözgelimi

$$\mathbf{u}^T \equiv [\, u_1, ..., u_N \,] \tag{1.20}$$

şeklinde devriğiyle verilen bir yöneyin çizelge gösteriliminde birinci sıra 1 ve u_1, ikinci sıra 2 ve u_2, son sıra ise N ve u_N değerlerini içerir. Bir işlevin de yöney gibi düşünülmesi olanaklıdır. Yöneyde sıralama değiştirgeni artı tamsayıların sonlu bir alt kümesinden değerler alır. Sonluluğu sonsuzlukla yerdeğiştirir ve sıralama değişkeninin artı tamsayılar küme'si yerine gerçel sayıların bir alt kümesinden değer almasını gündeme getirirsek yöney türü sıralanmış bir yapı elde ederiz. Kuvantum Mekaniği'nde kullanılan bu yapı **ket** olarak adlandırılır. Bir yöneyin devriğinin karmaşık eşleniği $\mathbf{u}^*$ ile simgelenir. Benzer biçimde bir **ket**'in devriğinin eşleniği de **bra** olarak adlandırılır. Dirac tarafından getirilen bu adlandırmaların nedeni (1.19) bağıntısında açıkça görülen olasılık işlevi yapısıdır. Tüm beklenen değerlerde gözükmesi gereken bu yapının beklenen değer simgesindeki sol ve sağ açı simgeleriyle eşleştirilmesi akla uygun gelmektedir. Beklenen değerdeki yapı İngilizce'de **braket** olarak adlandırıldığından sol kesim **bra** sağ kesim ise **ket** olarak adlandırılacak biçimde $\psi^*(x_1, ..., x_n, t)\hat{\mathcal{O}}\psi(x_1, ..., x_n, t)$ büyüklüğünün konum değişkenleri üzerinde (1.19) bağıntısında verilen tümlevini simgelemek amaç olarak alınmaktadır. Beklenen değerde tümlev tüm konum değişkenleri üzerinde alınmaktadır. Dolayısıyla, **bra** ve **ket** tanımlarında, konum değişkenlerini sıralama değiştirgenleri olarak düşünmek olanaklıdır. Bu durumda, karmaşık (complex) değer de alabilen yöneylerde olduğu gibi, $\mathbf{u}^*\mathbf{v}$ ölçekleyicisi yerine $\psi^*(x_1, ..., x_n, t)\hat{\mathcal{O}}\psi(x_1, ..., x_n, t)$ büyüklüğünün tüm konum değişkenleri üzerinde tümlevinin geçeceğini öngörmek olanaklıdır. Böylece, $|\,\psi(t)\,\rangle$ ile simgelenen **ket** tanımı

$$|\,\psi(t)\,\rangle \equiv \psi(x_1, ..., x_N, t) \tag{1.21}$$

şeklinde verilmelidir. **Bra** tanımı ise

$$\langle\,\psi(t)\,| \equiv \psi^*(x_1, ..., x_N, t) \tag{1.22}$$

olarak verilmelidir. Bu gösterilim, yukarıda da belirtildiği gibi ilk defa Dirac tarafından geliştirilmiş olup Kuvantum Mekaniği'nde genel bir kullanım haline gelmiştir.

Son iki eşitlikte konum değişkenleri sıralama değiştirgenleri olarak düşünüldüklerinden yalnızca zamana olan bağımlılık açık olarak gösterilmektedir. Bu durumda beklenen değer tanımını içeren (1.19) eşitliği aşağıdaki biçimde daha tıkız olarak yazılabilir.

$$\left\langle \hat{\mathcal{O}} \right\rangle \equiv \left\langle \psi(t) \left| \hat{\mathcal{O}} \right| \psi(t) \right\rangle \tag{1.23}$$

BÖLÜM 2

ENİYİLEMELİ DENETİM DENKLEMLERİ

2.1 Eniyilemeli Denetim Denklemlerinin Elde Edilmesi

Bir dış alan etkisi altındaki bir kuvantum dizgenin Hamiltonyen'i aşağıda verildiği gibidir. Burada H_0, aynı dizgenin yalıtılmış durumunda, zamandan bağımsız Hamiltonyen'ini göstermektedir. μ ise, zamandan bağımsız olan ve konuma bağımlılığı doğrusal olan ikikutup işlevidir.

$$H = H_0 + \mu E(t) \tag{2.1}$$

Başlangıçta yalıtılmış olan bir dizge üzerine $t = 0$ anında bir dış alan uygulandığı ve etkileşmenin $t = T$ anına kadar sürdürüldüğü ve dış alanın yeterince güçsüz olduğu, bu nedenle de doğrusallaştırmaya gidilebileceği öngörülmektedir. Etkileşmenin temel amacının bir $\hat{\mathcal{O}}$ işlecinin beklenen değerinin verilen bir $\tilde{O}$ değerine ya tam olarak ya da olabildiğince yakın olarak eriştirilmesi olduğu öngörülmektedir. Eğer tam olarak erişim söz konusuysa

$$\left\langle \psi(T) \left| \hat{\mathcal{O}} \right| \psi(T) \right\rangle = \tilde{O} \tag{2.2}$$

eşitliği geçerli olacaktır. Bu ise amaç işlevsisinde amaç teriminin, η bir Lagrange çarpanını göstermek üzere,

$$J_o \equiv \eta \left(\left\langle \psi(T) \left| \hat{\mathcal{O}} \right| \psi(T) \right\rangle - \tilde{O} \right) \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanması gerektiği anlamına gelmektedir. Eğer tam erişim yerine olabildiğince yakın erişimle yetinilecek olursa amaç terimi

$$J_o \equiv \frac{1}{2} \left(\left\langle \psi(T) \left| \hat{\mathcal{O}} \right| \psi(T) \right\rangle - \tilde{O} \right)^2 \tag{2.4}$$

şeklinde yazılabilir.

Eniyilemeli denetimde bir amaca erişim sürecinde bazı gözlemlenebilen büyüklüklerin olabildiğince küçük kılınması istenebilir. Bu amaçla, amaç işlevinin yaptırım (penalty) terimlerinden biri olarak aşağıdaki yapı öngörülebilir.

$$J_p^{(1)} = \frac{1}{2} \int_0^T dt W_p(t) \left\langle \psi(t) \left| \hat{\mathcal{O}}' \right| \psi(t) \right\rangle^2 \qquad W_p(t) > 0; \qquad t \in [0, T] \tag{2.5}$$

Burada $W_p(t)$ ile eksi değerler almayan bir ağırlık işlevi düşünülmektedir.

Eniyilemeli denetimde dış alanın, uygulamada yaratacağı kolaylıklar açısından, hem sonlu hem de olabildiğince küçük olması isteneceğinden amaç işlevsisinin ikinci yaptırım terimi aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$J_p^{(2)} = \frac{1}{2}\int_0^T dt W_E(t)E(t)^2 \qquad W_E(t) > 0; \qquad t \in [0,T] \tag{2.6}$$

Burada $W_E(t)$ ile eksi değerler almayan bir ağırlık işlevi düşünülmektedir.

Dizgenin dalga işlevi Schrödinger denklemini sağlamalıdır. Bu özellik bir λ Lagrange çarpanı üzerinden bir devinim kısıtı olarak amaç işlevsisine katılabilir.

$$J_{d,c} = \int_0^T dt \left\langle \lambda(t) \left| i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H(t) \right| \psi(t) \right\rangle + \int_0^T dt \left\langle \lambda^*(t) \left| -i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H(t) \right| \psi^*(t) \right\rangle \tag{2.7}$$

Bu denklemde * karmaşık eşleniği göstermektedir.

J_o amaç terimi, $J_p^{(1)}$ ile $J_p^{(2)}$ yaptırım terimleri ve $J_{d,c}$ devinim kısıtı toplandığında amaç işlevsisi elde edilir.

$$J = J_o + J_p^{(1)} + J_p^{(2)} + J_{d,c} \tag{2.8}$$

Eniyileme için amaç işlevsisinin birinci varyasyonunun sıfırlanması gerekir. Yani,

$$\delta J = 0 \tag{2.9}$$

denklemi geçerlidir. Bu varyasyonu belirleyebilmek için önce amaç teriminin varyasyonuna bakılabilir. Bu amaçla, amaca kesin erişim durumunda

$$\begin{aligned} \delta J_o &= \eta \left\langle \delta\psi(T) \left| \hat{\mathcal{O}} \right| \psi(T) \right\rangle + \eta \left\langle \psi(T) \left| \hat{\mathcal{O}} \right| \delta\psi(T) \right\rangle \\ &+ \delta\eta \left(\left\langle \psi(T) \left| \hat{\mathcal{O}} \right| \psi(T) \right\rangle - \tilde{\mathcal{O}} \right) \end{aligned} \tag{2.10}$$

ereğe olabildiğince yaklaşma durumunda ise

$$\begin{aligned} \delta J_o &= \left(\left\langle \psi(T) \left| \hat{\mathcal{O}} \right| \psi(T) \right\rangle - \tilde{\mathcal{O}} \right) \\ &\times \left(\left\langle \delta\psi(T) \left| \hat{\mathcal{O}} \right| \psi(T) \right\rangle + \left\langle \psi(T) \left| \hat{\mathcal{O}} \right| \delta\psi(T) \right\rangle \right) \end{aligned} \tag{2.11}$$

yazılabilir.

Gözlemlenebilen bir büyüklüğün beklenen değerinin dış alanla dizgenin etkileşimi süresince olabildiğince küçük kılınmasını amaçlayan birinci yaptırım teriminin birinci basamak varyasyonu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\delta J_p^{(1)} = \int_0^T dt W_p(t) \left\langle \psi(t) \left| \hat{\mathcal{O}}' \right| \psi(t) \right\rangle \left(\left\langle \delta\psi(t) \left| \hat{\mathcal{O}}' \right| \psi(t) \right\rangle + \left\langle \psi(t) \left| \hat{\mathcal{O}}' \right| \delta\psi(t) \right\rangle \right) \tag{2.12}$$

Alan genliğinin olabildiğince küçük kılınmasını öngören ikinci yaptırım teriminin varyasyonu aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\delta J_p^{(2)} = \int_0^T dt W_E(t) E(t) \delta E(t) \tag{2.13}$$

Amaç işlevsisinin birinci basamak varyasyonunu bütünüyle belirleyebilmek için gereken son terim devinim ile ilgili bağı betimleyen kesimdir. Bu kesim aşağıdaki denklem ile verilebilir.

$$\begin{aligned}
\delta J_{d,c} = & \int_0^T dt \left\langle \delta\lambda(t) \left| i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H \right| \psi(t) \right\rangle + \int_0^T dt \left\langle \lambda(t) \left| i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \delta H \right| \psi(t) \right\rangle \\
+ & \int_0^T dt \left\langle \lambda(t) \left| i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H \right| \delta\psi(t) \right\rangle + \frac{1}{2}\int_0^T dt \left\langle \delta\lambda^*(t) \left| -i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H \right| \psi^*(t) \right\rangle \\
+ & \int_0^T dt \left\langle \lambda^*(t) \left| -i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \delta H \right| \psi^*(t) \right\rangle + \int_0^T dt \left\langle \lambda^*(t) \left| -i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H \right| \delta\psi^*(t) \right\rangle
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Amaç işlevsisini oluşturan terimlerin varyasyonlarına ilişkin elde edilen denklemler **braket** gösterilimiyle verilmektedirler. Bu denklemler aşağıdaki bağıntı kullanılarak yeniden yazılabilir.

$$\left\langle \psi(T) \left| \hat{O} \right| \psi(T) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x,T) \hat{O} \psi(x,T) \tag{2.15}$$

Belirtilen denklemler yukarıdaki bağıntı kullanılarak yeniden elde edildiğinde aşağıdaki eşitliklere ulaşılır.

$$\begin{aligned}
\delta J_o &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x,T) \hat{O} \psi(x,T) - \tilde{O} \right) \delta \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x,T) \hat{O} \psi(x,T) - \tilde{O} \right) \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x,T) \hat{O} \psi(x,T) - \tilde{O} \right) \\
&\quad \times \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\delta\psi^*(x,T) \hat{O} \psi(x,T) + \psi^*(x,T) \hat{O} \delta\psi(x,T) \right] \right)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
\delta J_p^{(1)} = & \int_0^T dt W_p(t) \int_{-\infty}^{-\infty} dx \psi^*(x,t) \hat{O}' \psi(x,t) \left[\int_{-\infty}^{-\infty} dx \delta\psi^*(x,t) \hat{O}' \psi(x,t) \right] \\
& + \int_0^T dt W_p(t) \int_{-\infty}^{-\infty} dx \psi^*(x,t) \hat{O}' \psi(x,t) \left[\int_{-\infty}^{-\infty} dx \psi^*(x,t) \hat{O}' \delta\psi(x,t) \right]
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\delta J_p^{(2)} = \int_0^T dt W_E(t) E(t) \delta E(t) \tag{2.18}$$

$$
\begin{aligned}
\delta J_{d,c} \;&=\; \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta\lambda^*(x,t) i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) \\
&+\; \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \lambda^*(x,t) i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\delta\psi(x,t) \\
&-\; \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta\lambda^*(x,t)(H_0 + \mu E(t))\psi(x,t) \\
&-\; \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \lambda^*(x,t)\mu\delta E(t)\psi(x,t) \\
&-\; \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \lambda^*(x,t)(H_0 + \mu E(t))\delta\psi(x,t) \\
&-\; \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta\lambda(x,t) i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi^*(x,t) - \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \lambda(x,t) i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\delta\psi^*(x,t) \\
&-\; \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta\lambda(x,t)(H_0 + \mu E(t))\psi^*(x,t) \\
&-\; \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \lambda(x,t)\mu\delta E(t)\psi^*(x,t) \\
&-\; \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \lambda(x,t)(H_0 + \mu E(t))\delta\psi^*(x,t) \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

Bu eşitlikte kesimsel tümlevleme (integration by parts) uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\delta J_{d,c} &= \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta\lambda^*(x,t) i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} dx i\hbar \left[\lambda^*(x,T)\delta\psi(x,T) - \lambda^*(x,0)\delta\psi(x,0)\right] \\
&- \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta\psi(x,t) i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\lambda^*(x,t) \\
&- \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta\lambda^*(x,t)(H_0 + \mu E(t))\psi(x,t) \\
&- \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \lambda^*(x,t)\mu\delta E(t)\psi(x,t) \\
&- \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \lambda^*(x,t)(H_0 + \mu E(t))\delta\psi(x,t) \\
&- \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta\lambda(x,t) i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi^*(x,t) \\
&- \int_{-\infty}^{\infty} dx i\hbar \left[\lambda(x,T)\delta\psi^*(x,T) - \lambda(x,0)\delta\psi^*(x,0)\right] \\
&+ \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta\psi^*(x,t) i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\lambda(x,t) \\
&- \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta\lambda(x,t)(H_0 + \mu E(t))\psi^*(x,t) \\
&+ \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \lambda(x,t)\mu\delta E(t)\psi^*(x,t) \\
&- \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \lambda(x,t)(H_0 + \mu E(t))\delta\psi^*(x,t) \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\delta J &= \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^*(x,t) - (H_0+\mu E(t))\psi^*(x,t)\right]\delta\lambda(x,t) \\
&+ \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) - (H_0+\mu E(t))\psi(x,t)\right]\delta\lambda^*(x,t) \\
&- \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\lambda^*(x,t)\mu\psi(x,t) - \lambda(x,t)\mu\psi^*(x,t)\right]\delta E(t) \\
&+ \int_0^T dt W_E(t)E(t)\delta E(t) \\
&+ \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\psi^*(x,T)\hat{\mathcal{O}}\psi(x,T) - \tilde{O}\right)\int_{-\infty}^{\infty} dx\psi^*(x,T)\hat{\mathcal{O}}\delta\psi(x,T) \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} dx i\hbar\lambda^*(x,T)\delta\psi(x,T) - \int_{-\infty}^{\infty} dx i\hbar\lambda^*(x,0)\delta\psi(x,0) \\
&+ \int_0^T dt W_p(t)\int_{-\infty}^{-\infty} dx\psi^*(x,t)\hat{\mathcal{O}}'\psi(x,t)\int_{-\infty}^{\infty} dx\psi^*(x,t)\hat{\mathcal{O}}'\delta\psi(x,t) \\
&- \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dx\delta\psi(x,t)i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\lambda^*(x,t)\delta\psi(x,t) \\
&- \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dx\lambda^*(x,t)(H_0+\mu E(t))\delta\psi(x,t) \\
&+ \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\psi^*(x,T)\hat{\mathcal{O}}\psi(x,T) - \tilde{O}\right)\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta\psi^*(x,T)\hat{\mathcal{O}}\psi(x,T) \\
&- \int_{-\infty}^{\infty} dx i\hbar\lambda(x,T)\delta\psi^*(x,T) + \int_{-\infty}^{\infty} dx i\hbar\lambda(x,0)\delta\psi^*(x,0) \\
&+ \int_0^T dt W_p(t)\int_{-\infty}^{-\infty} dx\psi^*(x,t)\hat{\mathcal{O}}'\psi(x,t)\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta\psi^*(x,t)\hat{\mathcal{O}}'\psi(x,t) \\
&+ \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dx\delta\psi(x,t)i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\lambda(x,t)\delta\psi^*(x,t) \\
&- \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} dx\lambda(x,t)(H_0+\mu E(t))\delta\psi^*(x,t) = 0
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

elde edilir.

J amaç işlevi dış alan genliği E'ye ek olarak $\lambda(t)$ ve $\psi(t)$'ye bağlı olduğundan amaç işlevinin varyasyonu bu değişkenlerin varyasyonlarının bir doğrusal birleşimi olarak yazılabilir. Bu durumda, amaç işlevinin varyasyonu sıfıra eşitlendiğinde bu doğrusal birleşimin katsayılarının tek tek sıfıra eşitlenmesi gerekeceğinden elde edilen denklemler (2.22), (2.23), (2.24), (2.26), (2.25), (2.27) numaralı bağıntılarda verildiği gibidir.

$$
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = (H_0+\mu E(t))\psi(x,t) \tag{2.22}
$$

$$
\psi(0) = \tilde{\psi} \tag{2.23}
$$

$$
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\lambda(x,t) = (H_0+\mu E(t))\lambda(x,t) - W_p(t)\left\langle\psi(t)\left|\hat{\mathcal{O}}'\right|\psi(t)\right\rangle\hat{\mathcal{O}}'\psi(x,t) \tag{2.24}
$$

$$\lambda(T) = -\frac{i}{\hbar}\left[\left\langle \psi(T)\left|\hat{\mathcal{O}}\right|\psi(T)\right\rangle - \tilde{O}\right]\hat{\mathcal{O}}\,\psi(T) \tag{2.25}$$

$$E(t) = \frac{2}{W_E(t)}\Re e\left(\langle \lambda(t)\left|\mu\right|\psi(t)\rangle\right) \tag{2.26}$$

$$\left\langle \psi(T)\left|\hat{\mathcal{O}}\right|\psi(T)\right\rangle = \tilde{O} + \eta \tag{2.27}$$

(2.22) bağıntısında elde edilen denklem bilinmeyen dalga işlevi $\psi(t)$'nin belirlenmesinde kullanılacak olan Schrödinger denklemidir. Kuvantum Dinamiği'nde, çevresinden yalıtılmış bir dizgenin devinimini zamandan bağımsız Schrödinger denklemi betimler. Bu denklem dizgenin ileriye doğru evrimini tanımlar. Yani, bu çalışmada $t = 0$ anında uygulanmaya başlanan dış alan etkisini $t = T$ anına taşıyacak olan denklemdir. Burada $\hbar$ daha önce belirtildiği gibi indirgenmiş Planck değişmezini yani h ile gösterilen ve değeri dizgelere bağımlı olmayan evrensel bir değişmezin 2π'ye oranını göstermektedir. Zaman değiştirgeni ise t ile simgelenmektedir.

(2.23) bağıntısı Schrödinger denklemine eşlik eden başlangıç koşulunu betimler. Burada, $\tilde{\psi}$ işlevi karesi tümlevlenebilen işlevlerin Hilbert uzayından seçilmelidir. Çünkü, ancak bu uzaydan seçilen bir işlev dalga işlevinin özelliklerini sağlar.

(2.24) bağıntısı ile verilen eşdüzey işlevi etkileşim sürecinin sonundan başına geriye doğru evrimi tanımlar. Diğer bir deyişle, dalga işlevi dizgeyi geleceğe taşırken eşdüzey işlevi dizgeyi bulunulan ana geri döndürür. Bu iki evrimi birbirine bağlayan denklem (2.26) bağıntısı ile verilen eşitliktir. Bu denklem köprü denklemi olarak adlandırılabilir ve dış alan genliğini belirlemek için kullanılır. Denklemdeki $\Re e$ gerçel kesimi göstermektedir.

(2.27) bağıntısı ile verilen denklem amaç işlecinin, yani $\hat{\mathcal{O}}$'nin, beklenen değerinin erek değere ne kadar yaklaştığı ile ilgilidir. Lagrange değiştirgeni olarak adlandırılan η etkileşim zamanının bitimindeki erek değerine ne kadar yaklaşıldığı ile ilgilidir. Başka bir deyişle, η amaç işlecinin beklenen değerinin önceden belirlenen erek değerinden sapmasını betimler. Dolayısıyla, η'ya **sapma değiştirgeni** denilebilir. Köprü denklemi hem dış alan genliğini, hem de sapma değiştirgenini bulmak için yeterli değildir. Her ikisini de bulmak için (2.27) denklemine gereksinim vardır.

2.2 Dizge Özelliklerinin Belirlenmesi

Kuvantum Mekaniği'nde H ile gösterilen dizgenin Hamiltonyen'i devimsel erke terimi ile gizilgüç terimlerinin toplamı olarak tanımlanır. Uyumlu salınıcı (harmonic oscillator) için bu yapı aşağıdaki biçimdedir.

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}kx^2 \tag{2.28}$$

Devimsel erke terimi konum değişkenlerine göre türevleme terimlerini ve konum değişkenlerini içerir. Diğer bir deyişle konum yanısıra momentum değişkenlerini de içerebilir. Gizilgüç terimi ise genelde yalnızca konum değişkenlerine bağımlı olan işlevlerle gösterilir. Genellikle, ilgilenilen dizgeler elektrik yüklü parçacıklardan oluştuğundan, dış etkileşim kaynağının da elektromanyetik bir alan olarak düşünülmesi söz konusudur. Elektromanyetik alanlar, Maxwell Kuramı'na göre, ölçekleyici bir alanla yöneysel bir alanın bileşkesi olarak tanımlanırlar. Bu genel tanımlamada, ölçekleyici alan elektriksel tabanlı, yöneysel alan ise manyetik tabanlı etkileşimleri betimlerler. Manyetik alanlar erke düzeyi yüksek olan ya da güçlü olarak nitelendirilebilen etkileşimleri betimlerler. Elektriksel alanlar ise daha az erkesi olan etkileşimleri yani güçsüz etkileşimleri betimlerler. Burada, güçsüz alanlarla ilgilendiğimiz öngörüldüğünden etkileşimin salt elektriksel tabanlı olduğu varsayılacaktır.

(2.28) ile verilen Hamilton işleci Schrödinger denkleminde yerine yerleştirilirse

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{2}kx^2\psi(x,t) \tag{2.29}$$

elde edilir. Bu denklemin çözümünde fiziksel birimsiz (boyutsuz) koordinatların kullanılması matematiksel çözümde kolaylık açısından yeğlenir. Bu bağlamda,

$$\frac{(mk)^{\frac{1}{4}}}{\hbar^{\frac{1}{2}}}x \quad \longrightarrow \quad x \tag{2.30}$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}}t \quad \longrightarrow \quad t \tag{2.31}$$

olarak tanımlanan dönüşümler ile

$$i\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{2}x^2\psi(x,t) \tag{2.32}$$

şeklinde Schrödinger denkleminin yeni durumu elde edilir.

İki kutuplu işlev, $\mu(x)$, aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\mu(x) \equiv x \tag{2.33}$$

Bu işlev (2.32)'de verilen Schrödinger denkleminde yerine konulursa aşağıdaki anlatım elde edilir.

$$i\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{2}x^2 + E(t)x\right)\psi(x,t) \tag{2.34}$$

(2.34) denklemine eşlik eden (2.23) bağıntısında verilen başlangıç koşulunda bulunan dalga işlevinin başlangıç biçimi uyumlu salınıcının taban düzeyi (ground state) olarak seçilmiştir.

$$\psi(x,0) = \pi^{-\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \tag{2.35}$$

Bu çalışmada yer alan işleçlerin, $\hat{\mathcal{O}}$ ile $\hat{\mathcal{O}}'$'in ise aşağıdaki gibi verildiği varsayılmaktadır.

$$\hat{\mathcal{O}} \equiv x^2 \tag{2.36}$$

$$\hat{\mathcal{O}}' \equiv -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{2.37}$$

2.3 Denklemlerin Saptırım Açılımları Yöntemi ile Çözülmesi

Bu bölümde $t = 0$ anından $t = T$ anına kadar uygulanan dış alan genliği $E(t)$'nin belirlenmesi için saptırım açılımları yöntemi kullanılacaktır.

Hamilton işlecinin dış alanla etkileşme terimlerini içeriyor olması dalga işlevinin kolayca bulunmasını engelleyebilmektedir. Bu durumda, analitik çözümün bir çırpıda bulunamamasından dolayı, saptırım açılımları kullanılabilir. Aynı biçimde (2.24) ile verilen eş düzey denkleminde de aynı yol izlenebilir.

Saptırım açılımı (perturbation expansion) yöntemi kullanılırken açılımın dayandığı temel düşünce, ilgilenilen denklemde, çözümün kolayca elde edilmesine engel olan ama diğer terimlere göre küçük katkıda bulunan terimlerin bulunması ve önce bu terimlerin etkilerinin gözönüne alınmadan denklemin çözülmesi ve daha sonra bu terimlerden gelen küçük katkıların ardışık biçimde sıralanmış katkılarla çözüme katılmasıdır. Bu bağlamda, saptırım açılımını somut olarak üretebilmek için ya denklemde doğal olarak bulunan ve saptırım terimlerini ölçekleyen bir değiştirgenden yararlanılır, ya da böyle bir değiştirgen yoksa yapay olarak denklemin uygun yerlerine yerleştirilip açılım sonrasında değerinin 1 alınması öngörülür.

Dolayısıyla, burada yapay değiştirgenleme yolunu izleyerek ve ν yapay değiştirgenini kullanarak Schrödinger denklemini ve ona eşlik eden başlangıç koşulunu aşağıdaki biçimde yeniden yazabiliriz.

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t,\nu)}{\partial t} = [\, H_0 + \nu E(t)\mu(x)\,]\,\psi(x,t,\nu) \tag{2.38}$$

$$\psi(x,0,\nu) = f(x) = \pi^{-\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \tag{2.39}$$

Burada yapay değiştirgen olan ν değiştirgeni yerine, daha önceden belirtildiği gibi, açılım sonrasında 1 yerleştirilecektir. (2.38) denkleminin çözümü için aşağıdaki saptırım açılımı öngörülebilir.

$$\psi(x,t,\nu) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \psi_k(x,t) \tag{2.40}$$

Bu açılımın (2.38) ve (2.39) denklemlerinde kullanılmasıyla ortaya çıkan eşitliğin her iki yanı sonsuz toplamlar içerir. Bu toplamlarda ν^k ve ν^{k+1} şeklinde iki farklı kuvvet gözükür. Sonsuz toplamlardaki toplama değiştirgeninin tanım bölgesini değiştirerek $k+1$ yerine k getirmek olanaklıdır. Bu yapıldıktan sonra her iki yanda ortaya çıkan toplamlarda ν^k teriminin katsayıları eşitlenerek aşağıdaki özyineli eşitliklere ulaşılabilir. Çalışmada bu andan sonraki denklemlerde bağıntıların yalınlığı açısından $\hbar = 1$ olarak alınacaktır.

$$\begin{aligned} i\frac{\partial \psi_k(x,t)}{\partial t} &= H_0\psi_k(x,t,\nu) + E(t)\mu(x)\psi_{k-1}(x,t,\nu), \\ & \quad k = 0, 1, ..., \qquad \psi_{-1}(x,t) \equiv 0 \end{aligned} \tag{2.41}$$

$$\psi_k(x,0) = \delta_{k0}\pi^{-\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}} \tag{2.42}$$

Burada δ_{k0} Kronecker delta simgesi olarak kullanılmıştır.

Bu denklemlerin ve eşdüzey denklemlerinin çözümünde işleri biraz daha kolaylaştırabilmek amacıyla, Hamiltonyen işlecinin özişlevleri kullanılacaktır. Hamilton işlecinin, boyları birimleştirilmiş, özişlevleri $\varphi_n(x)$ ile gösterilerek aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$H_0\varphi_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi_n(x), \qquad n = 0, 1, ... \tag{2.43}$$

Burada özişlevler Hermite çokterimlilerinin bir üstel işlev ile çarpılmış biçimleri olmakta, farklı iki özişlevin x'in tüm gerçel değerleri üzerindeki tümlevi sıfırlanmakta ve bunlardan ilk birkaçı aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \pi^{-\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \\ \varphi_1(x) &= \sqrt{2}\pi^{-\frac{1}{4}}x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \\ \varphi_2(x) &= \sqrt{2}\pi^{-\frac{1}{4}}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \\ \varphi_3(x) &= \frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-\frac{1}{4}}\left(x^3 - \frac{3}{2}x\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned} \tag{2.44}$$

Bu özişlevler birbirine diktir ve bu özişlevlerin boyları 1'e eşittir.

(2.41) ve (2.42) bağıntıları ile verilen özyineli denklemlerde yukarıdaki özişlevlerden de yararlanarak ve k yerine 0 ve 1 değerleri konularak elde edilen denklemler yeniden yazılırsa, Schrödinger denklemi için sıfırıncı ve birinci basamaktan saptırım açılım denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden sıfırıncı basamaktan olanı ve buna eşlik eden başlangıç koşulu aşağıda verilmektedir.

$$i\frac{\partial \psi_0(x,t)}{\partial t} - H_0\psi_0(x,t) = 0 \tag{2.45}$$

$$\psi_0(x,t)\mid_{t=0} = \pi^{-\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}} = \varphi_0(x) \tag{2.46}$$

Birinci basamaktan saptırım açılım denklemi ve buna eşlik eden başlangıç koşulu ise,

$$i\frac{\partial \psi_1(x,t)}{\partial t} - H_0\psi_1(x,t) = E(t)\mu(x)\psi_0(x,t) \tag{2.47}$$

$$\psi_1(x,t)\mid_{t=0} = 0 \tag{2.48}$$

olarak elde edilebilmektedir.

Bu saptırım açılım denklemleri çözülürse, sıfırıcı basamaktan açılım terimi

$$\psi_0(x,t) = \mathrm{e}^{-\frac{it}{2}}\varphi_0(x) \tag{2.49}$$

eşitliğiyle verilecek biçimde elde edilir. Birinci basamaktan açılım denkleminin çözülebilmesi için denklemdeki bilinen büyüklüklerin değerleri yerlerine konulursa,

$$i\frac{\partial\psi_1(x,t)}{\partial t} - H_0\psi_1(x,t) = E(t)x\mathrm{e}^{-\frac{it}{2}}\varphi_0(x) \tag{2.50}$$

elde edilir. (2.44) bağıntılarında verilen özişlevlerden $\varphi_0(x)$'in değeri kullanılacak olursa,

$$x\varphi_0(x) = x\pi^{-\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_1(x) \tag{2.51}$$

ilişkisi elde edilir. Bu ilişki (2.50) denkleminde kullanılacak ve dalga işlevinin birinci basamaktan açılımında

$$\psi_1(x,t) = b_0(t)\varphi_0(x) + b_1(t)\varphi_1(x) + b_2(t)\varphi_2(x) \tag{2.52}$$

öngörümü yapılacak olursa, elde edilen ilişkiden dolayı yalnızca $\varphi_1(x)$'in katsayısı olan $b_1(t)$ işlevinin bu açılımda varolması beklenir. Yani, $b_0(t)$ ve $b_2(t)$ işlevleri aşağıda verildiği gibi sıfıra eşittir.

$$b_0(t) = 0 \tag{2.53}$$

$$b_2(t) = 0 \tag{2.54}$$

Bu sonuçlara dayanarak $\psi_1(x,t)$ için yapılan öngörümün yeni durumu

$$\psi_1(x,t) = b_1(t)\varphi_1(x) \tag{2.55}$$

yapısındadır. Elde edilen bu denklem sağ yanlı ve sıradan türevli bir denklemdir ve (2.48) ile verilen başlangıç koşulu altında çözüldüğünde $b_1(t)$

$$b_1(t) = -i\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{3it}{2}}\int_0^t d\tau E(\tau)\mathrm{e}^{i\tau} \tag{2.56}$$

olarak bulunur. Eğer $b_1(t)$ (2.55) denkleminde yerine konulursa,

$$\psi_1(x,t) = \left(-i\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{3it}{2}}\int_0^t d\tau E(\tau)\mathrm{e}^{i\tau}\right)\varphi_1(x) \tag{2.57}$$

sonucuna ulaşılır. (2.40) bağıntısına göre dalga işlevi

$$\psi(x,t,\nu) = \psi_0(x,t) + \nu\psi_1(x,t) \tag{2.58}$$

şeklinde yazılır ve daha önceden söylenildiği gibi ν yapay değiştirgeni yerine 1 değeri yerleştirilirse dalga işlevinin son hali aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$\psi(x,t) = \mathrm{e}^{-\frac{it}{2}}\varphi_0(x) + \left(-i\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{3it}{2}}\int_0^t d\tau E(\tau)\mathrm{e}^{i\tau}\right)\varphi_1(x) \qquad (2.59)$$

Artık, eşdüzey işlevinin sağladığı denklemin çözümü ile ilgilenilebilir. Hamilton işlecinin dış alanla etkileşme terimlerini içeriyor olması dalga işlevinin kolayca bulunmasını engelleyebilmektedir. Bu durumda, analitik çözümün bir çırpıda bulunamamasından dolayı, daha önceden gösterildiği üzere, saptırım açılımları kullanılabilmektedir. Bu yüzden, (2.24) eşdüzey denkleminde ve ona eşlik eden (2.25) son an koşulu denkleminde de aynı yola başvurulabilir. Dolayısıyla, daha genişletilmiş olan aşağıdaki denklem gözönüne alınarak çözüm arayışına geçilebilir.

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H_0 - \nu\mu E(t)\right)\lambda(x,t,\nu) = -W_p(t)\left\langle\psi(t,\nu)\left|\hat{\mathcal{O}}'\right|\psi(t,\nu)\right\rangle\hat{\mathcal{O}}'\psi(x,t,\nu) \qquad (2.60)$$

$$\lambda(x,T,\nu) = -i\frac{\eta}{\hbar}\hat{\mathcal{O}}\psi(x,T,\nu) \qquad (2.61)$$

Bu denklemin çözümü için aşağıdaki saptırım açılımları öngörülebilir.

$$\lambda(x,t,\nu) = \sum_{j=0}^{\infty}\nu^k\lambda_k(x,t), \qquad \psi(x,t,\nu) = \sum_{j=0}^{\infty}\nu^k\psi_k(x,t) \qquad (2.62)$$

Burada, daha önceden olduğu gibi, ν simgesi saptırım değiştirgenini göstermektedir. (2.62) açılımları (2.60) ve (2.61) denklemlerinde yerlerine konulur ve ele geçen anlatımların her iki yanları saptırım değiştirgeninin artan kuvvetleri türünden yeniden sıralanır ve eşitliklerin her iki yanındaki aynı ν kuvvetlerinin katsayıları eşitlenecek olursa $\lambda_k(x,t)$ ve $\psi_k(x,t)$ terimleri arasında özyineli nitelikte eşitlik takımları elde edilir. Bunlardan ilki, yani eşdüzey işlevi için sıfırıncı basamaktan saptırım açılım denklemi ve ona eşlik eden son an koşulu aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H_0\right)\lambda_0(x,t) = -W_p(t)\left\langle\psi(t)\left|\hat{\mathcal{O}}'\right|\psi(t)\right\rangle\hat{\mathcal{O}}'\psi_0(x,t) \qquad (2.63)$$

$$\lambda_0(x,T) = -i\frac{\eta}{\hbar}\hat{\mathcal{O}}\psi_0(x,T) \qquad (2.64)$$

Eşdüzey işlevi için birinci basamaktan saptırım açılım denklemi ve son an koşulu ise

$$\begin{aligned}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H_0\right)\lambda_1(x,t) &= \mu E(t)\lambda_0(x,t) - W_p(t)\left\langle\psi_1(t)\left|\hat{\mathcal{O}}'\right|\psi_0(t)\right\rangle\hat{\mathcal{O}}'\psi_0(x,t)\\ &- W_p(t)\left\langle\psi_0(t)\left|\hat{\mathcal{O}}'\right|\psi_1(t)\right\rangle\hat{\mathcal{O}}'\psi_0(x,t)\\ &- W_p(t)\left\langle\psi_0(t)\left|\hat{\mathcal{O}}'\right|\psi_0(t)\right\rangle\hat{\mathcal{O}}'\psi_1(x,t) \qquad (2.65)\end{aligned}$$

$$\lambda_1(x,T) = -i\frac{\eta}{\hbar}\hat{\mathcal{O}}\psi_1(x,T) \tag{2.66}$$

denklemleri olarak elde edilir.

Bu denklemlerin sağ yanı dalga işlevine bağımlıdır. Eğer, dalga işlevinin Schrödinger denkleminin çözümü olarak elde edildiği varsayılırsa, sağ yan biliniyor olarak düşünülebilir. Ancak, eşdüzey işlevinin çözümünün tam olarak elde edilebilmesi için denklemin sağ tarafındaki terimlerin belirlenmesi gerekir. Bu terimlerden ilki $\left\langle \psi(t) \middle| \hat{\mathcal{O}}' \middle| \psi(t) \right\rangle$, ikincisi $\hat{\mathcal{O}}'\psi_0(x,t)$, üçüncüsü de $\hat{\mathcal{O}}'\psi_1(x,t)$'dir. İlk terimin belirlenmesi için aşağıda verilen yaklaştırım gözönüne alınacaktır. Bu yaklaştırımın en son birinci dereceye kadar çıkarılmasının nedeni dizgenin güçsüz dış alan etkisi altında olduğu varsayımıdır.

$$\begin{aligned}\left\langle \psi(t,\nu) \middle| \hat{\mathcal{O}}' \middle| \psi(t,\nu) \right\rangle &\approx \left\langle \psi_0(t) \middle| \hat{\mathcal{O}}' \middle| \psi_0(t) \right\rangle \\ &+ \nu\left\{ \left\langle \psi_1(t) \middle| \hat{\mathcal{O}}' \middle| \psi_0(t) \right\rangle + \left\langle \psi_0(t) \middle| \hat{\mathcal{O}}' \middle| \psi_1(t) \right\rangle \right\}\end{aligned} \tag{2.67}$$

Bu yaklaştırımdaki terimler ayrı ayrı belirlenecek olursa

$$\left\langle \psi_0(t) \middle| \hat{\mathcal{O}}' \middle| \psi_0(t) \right\rangle = \frac{1}{2} \tag{2.68}$$

$$\left\langle \psi_1(t) \middle| \hat{\mathcal{O}}' \middle| \psi_0(t) \right\rangle = 0 \tag{2.69}$$

$$\left\langle \psi_0(t) \middle| \hat{\mathcal{O}}' \middle| \psi_1(t) \right\rangle = 0 \tag{2.70}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu sonuçlar (2.67) denkleminde yerlerine konulursa,

$$\left\langle \psi(t,\nu) \middle| \hat{\mathcal{O}}' \middle| \psi(t,\nu) \right\rangle = \frac{1}{2} \tag{2.71}$$

sonucuna ulaşılır. Belirlenmesi gereken ikinci ve üçüncü terimlerle ilgili sonuçlar ise

$$\hat{\mathcal{O}}'\psi_0(x,t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{it}{2}}\varphi_0(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{it}{2}}\varphi_2(x) \tag{2.72}$$

$$\hat{\mathcal{O}}'\psi_1(x,t) = \frac{3}{2}b_1(t)\varphi_1(x) - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}b_1(t)\varphi_3(x) \tag{2.73}$$

eşitlikleriyle verilebilirler. (2.64) ve (2.66) bağıntıları ile verilen son an koşullarında bilinen değerler yerine konursa

$$\lambda_0(x,T) = -i\eta x^2\mathrm{e}^{-\frac{iT}{2}}\varphi_0(x) \tag{2.74}$$

$$\lambda_1(x,T) = -i\eta x^2 b_1(T)\varphi_1(x) \tag{2.75}$$

bağıntıları elde edilir. Bu bağıntılarda yer alan $x^2\varphi_0(x)$ ve $x^2\varphi_1(x)$ anlatımları sırası ile özişlev ilişkilerinden yararlanılarak çözülürse,

$$x^2\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_2(x) + \frac{1}{2}\varphi_0(x) \tag{2.76}$$

$$x^2\varphi_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\varphi_3(x) + \frac{3}{2}\varphi_1(x) \tag{2.77}$$

elde edileceği görülür. Bu eşitlikler (2.74) ile (2.75) bağıntılarında kullanılırsa son an koşullarının son durumu olan

$$\lambda_0(x,T) = -\frac{1}{\sqrt{2}}i\eta \mathrm{e}^{-\frac{it}{2}}\varphi_2(x) - \frac{1}{2}i\eta \mathrm{e}^{-\frac{it}{2}}\varphi_0(x) \tag{2.78}$$

ve

$$\lambda_1(x,T) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i\eta b_1(T)\varphi_3(x) - \frac{3}{2}i\eta b_1(T)\varphi_1(x) \tag{2.79}$$

eşitlikleri elde edilir.

(2.63) bağıntısı bulunan son verilere göre yeniden düzenlenir ve yazılırsa,

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H_0\right)\lambda_0(x,t) = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{it}{2}}\varphi_0(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{it}{2}}\varphi_2(x)\right] \tag{2.80}$$

sonucuna ulaşılır.

(2.80) bağıntısı ile verilen eşdüzey denklemiyle ilgili sıfırıncı basamaktan saptırım açılımı kolayca görülebildiği üzere sağ yanlı göreli türevli bir denklemdir. Bu türevli denklem eşlik eden (2.78) son an koşulu altında çözülmesi istendiğinde, $\lambda_0(x,t)$ için

$$\lambda_0(x,t) = c_0(t)\varphi_0(x) + c_1(t)\varphi_1(x) + c_2(t)\varphi_2(x) \tag{2.81}$$

biçimli bir öngörüm yapılması gerekir. Yapılan bu öngörümün de yardımıyla türevli denklemin sağ yanı incelendiğinde sağ yanın yalnızca $\varphi_0(x)$ ve $\varphi_2(x)$'e bağlı olduğu gorülür. Bunun anlamı $c_1(t)$ işlevinin

$$c_1(t) = 0 \tag{2.82}$$

yapısında olacağıdır. Dolayısıyla $\lambda_0(x,t)$ için

$$\lambda_0(x,t) = c_0(t)\varphi_0(x) + c_2(t)\varphi_2(x) \tag{2.83}$$

eşitliğinin yazılması olanaklıdır. Tüm bu bilgiler ışığında türevli denklem $\varphi_0(x)$ ve $\varphi_2(x)$'e göre ayrı ayrı çözüldüğünde $c_0(t)$ ve $c_2(t)$ işlevlerinin çözümleri

$$c_0(t) = \frac{i}{2}\eta \mathrm{e}^{-\frac{it}{2}} - \frac{i}{4}\mathrm{e}^{-\frac{it}{2}}(T-t) \tag{2.84}$$

$$c_2(t) = \left[\frac{i}{\sqrt{2}}\eta \mathrm{e}^{2iT} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\mathrm{e}^{2iT} - \mathrm{e}^{2it}\right)\right]\mathrm{e}^{-\frac{5it}{2}} \tag{2.85}$$

biçimlerinde elde edilir. Buna göre $\lambda_0(x,t)$'nin çözümü

$$\begin{aligned}\lambda_0(x,t) &= \left[\frac{i}{2}\eta \mathrm{e}^{-\frac{it}{2}} - \frac{i}{4}\mathrm{e}^{-\frac{it}{2}}(T-t)\right]\varphi_0(x) \\ &+ \left\{\left[\frac{i}{\sqrt{2}}\eta \mathrm{e}^{2iT} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\mathrm{e}^{2iT} - \mathrm{e}^{2it}\right)\right]\mathrm{e}^{-\frac{5it}{2}}\right\}\varphi_2(x)\end{aligned} \tag{2.86}$$

eşitliği ile verilmektedir.

(2.65) bağıntısı ile verilen eşdüzey işlevinin birinci basamaktan saptırım açılım denklemi (2.71), (2.73) bağıntılarında bulunan veriler gözönüne alınarak yeniden yazılırsa,

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H_0\right)\lambda_1(x,t) \quad = \quad xE(t)\lambda_0(x,t) - \frac{1}{2}\hat{\mathcal{O}}'\psi_1(x,t) \tag{2.87}$$

sağ yanlı göreli türeli denklemi elde edilir. Yine daha öncelerde dalga işlevi ve sıfırıncı basamaktan eşdüzey işlevi için yapılan öngörümlerde olduğu gibi bir öngörüm yapılacak olursa,

$$\lambda_1(x,t) = d_0(t)\varphi_0(x) + d_1(t)\varphi_1(x) + d_2(t)\varphi_2(x) + d_3(t)\varphi_3(x) \tag{2.88}$$

türünde bir yapının öngörülebileceği anlaşılır.

Türevli denklem, yapılan bu öngörüm ve (2.79) ile verilen son an koşulu altında çözülmek istendiğinde türevli denklemin ve son an koşulunun doğasından dolayı $d_0(t)$ ve $d_2(t)$ işlevleri için

$$d_0(t) = 0 \tag{2.89}$$

$$d_2(t) = 0 \tag{2.90}$$

eşitlikleri zorlanmadan elde edilebilir. Bu durumda $\lambda_1(x,t)$ işlevinin yapısı

$$\lambda_1(x,t) = d_1(t)\varphi_1(x) + d_3(t)\varphi_3(x) \tag{2.91}$$

biçimli olmak zorundadır.

Buraya kadar anlatılanların ışığında türevli denklemlerin çözülmesi ile birlikte $d_1(t)$ ve $d_3(t)$ işlevlerinin eşitleri

$$\begin{aligned} d_1(t) = {} & i\frac{3}{2}\eta b_1(T)\mathrm{e}^{\frac{3iT}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{3it}{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{3it}{2}}\int_t^T d\tau c_0(\tau)E(\tau)\mathrm{e}^{\frac{3i\tau}{2}} \\ & + i\mathrm{e}^{-\frac{3it}{2}}\int_t^T d\tau c_2(\tau)E(\tau)\mathrm{e}^{\frac{3i\tau}{2}} - i\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-\frac{3it}{2}}\int_t^T d\tau b_1(\tau)\mathrm{e}^{\frac{3i\tau}{2}} \end{aligned} \tag{2.92}$$

$$\begin{aligned} d_3(t) \quad = \quad & -i\eta\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}b_1(T)\mathrm{e}^{-\frac{7i(t-T)}{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{7it}{2}}\int_t^T d\tau c_2(\tau)E(\tau)\mathrm{e}^{\frac{7i\tau}{2}} \\ + \quad & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{7it}{2}}\int_t^T d\tau b_1(\tau)\mathrm{e}^{\frac{7i\tau}{2}} \end{aligned} \tag{2.93}$$

olarak elde edilir. Yukarıdaki eşitliklerde kullanılmış olan $b_1(t)$ işlevi ise (2.56) denkleminde verilmiştir. Bu bağlamda bulunan $d_1(t)$ ve $d_3(t)$ işlevleri (2.91) sırasayılı denklemde yerine yerleştirilirse $\lambda_1(x,t)$ işlevinin son durumu aşağıdaki biçimde elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned}
\lambda_1(x,t) &= \Bigg[i\frac{3}{2}\eta b_1(T)\mathrm{e}^{\frac{3iT}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{3it}{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{3it}{2}}\int_t^T d\tau c_0(\tau)E(\tau)\mathrm{e}^{\frac{3i\tau}{2}} \\
&+ i\mathrm{e}^{-\frac{3it}{2}}\int_t^T d\tau c_2(\tau)E(\tau)\mathrm{e}^{\frac{3i\tau}{2}} - i\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-\frac{3it}{2}}\int_t^T d\tau b_1(\tau)\mathrm{e}^{\frac{3i\tau}{2}}\Bigg]\varphi_1(x) \\
&+ \Bigg[-i\eta\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}b_1(T)\mathrm{e}^{-\frac{7i(t-T)}{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{7it}{2}}\int_t^T d\tau c_2(\tau)E(\tau)\mathrm{e}^{\frac{7i\tau}{2}} \\
&+ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{7it}{2}}\int_t^T d\tau b_1(\tau)\mathrm{e}^{\frac{7i\tau}{2}}\Bigg]\varphi_3(x)
\end{aligned} \tag{2.94}$$

Dalga ve eşdüzey işlevlerinin bulunmasından sonra dış alan genliği $E(t)$'nin bulunabilmesi için köprü denklemine geçilebilir. (2.26) ile verilen denklemde **Braket** gösterilimi içindeki dalga ve eşdüzey işlevlerinin yerine, dış alan genliğinin güçsüz olmasından dolayı, bu işlevlerin sıfırıncı ve birinci basamak saptırım açılımlarını yerleştirilecek olursa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$E(t) = \frac{2}{W_E(t)}\Re e\left(\langle\lambda_0(t)|\mu|\psi_0(t)\rangle + \langle\lambda_1(t)|\mu|\psi_0(t)\rangle + \langle\lambda_0(t)|\mu|\psi_1(t)\rangle\right) \tag{2.95}$$

Yukarıdaki eşitlik, $\mu(x) = x$ olduğundan, yeniden yazılırsa,

$$E(t) = \frac{2}{W_E(t)}\Re e\left(\langle\lambda_0(t)|x|\psi_0(t)\rangle + \langle\lambda_1(t)|x|\psi_0(t)\rangle + \langle\lambda_0(t)|x|\psi_1(t)\rangle\right) \tag{2.96}$$

elde edilir. Burada elde edilen terimler tek tek belirlenirse,

$$\langle\lambda_0(t)|x|\psi_0(t)\rangle = 0 \tag{2.97}$$

$$\langle\lambda_1(t)|x|\psi_0(t)\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}c_0^*(t)b_1(t) + c_2^*(t)b_1(t) \tag{2.98}$$

$$\langle\lambda_0(t)|x|\psi_1(t)\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}d_1^*(t)\mathrm{e}^{-\frac{it}{2}} \tag{2.99}$$

bağıntıları elde edilir. Bu bağıntılarda bulunan $b_1(t)$, $c_0(t)$, $c_2(t)$, $d_1(t)$ işlevleriyle ilgili eşitlikler sırasıyla (2.56), (2.84), (2.85), (2.92), denklemlerinde verilmiştir.

Bu büyüklükler için elde edilmiş bulunan bu sonuçlar köprü denkleminde yerlerine konulur ve $W_E(t) = 1$ olarak alınırsa aşağıdaki eşitliğe ulaşılır.

$$E(t) = \sqrt{2}\Re e\left(c_0^*(t)b_1(t)\right) + 2\Re e\left(c_2^*(t)b_1(t)\right) + \sqrt{2}\Re e\left(d_1^*(t)\mathrm{e}^{-\frac{it}{2}}\right) \tag{2.100}$$

Yukarıdaki bağıntıda bulunan üç terimin gerçel kesimlerinin ayrı ayrı belirlenmesi durumunda elde edilen ilk terim ile ilgili sonuç aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned}
\Re e\left(c_0^*(t)b_1(t)\right) &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\eta\left[\cos(t)\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\tau) + \sin(t)\int_0^t d\tau E(\tau)\sin(\tau)\right] \\
&+ \frac{1}{4\sqrt{2}}(T-t)\left[\cos(t)\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\tau) + \sin(t)\int_0^t d\tau E(\tau)\sin(\tau)\right]
\end{aligned} \tag{2.101}$$

Aynı bağıntıdaki ikinci terimle ilgili sonuç

$$\Re e\left(c_2^*(t)b_1(t)\right) = \frac{1}{2}\eta\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(2T-t-\tau)$$
$$- \frac{1}{8}\int_0^t d\tau E(\tau)\sin(2T-t-\tau) + \frac{1}{8}\int_0^t d\tau E(\tau)\sin(t-\tau) \qquad (2.102)$$

ile verilmektedir. Üçüncü terimin sonucu ise aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\Re e\left(d_1^*(t)\mathrm{e}^{-\frac{it}{2}}\right) = -\frac{3}{2\sqrt{2}}\eta\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\tau-t)$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{2}}\eta\int_t^T d\tau E(\tau)\cos(\tau-t) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_t^T d\tau E(\tau)(T-\tau)\cos(\tau-t)$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\eta\int_t^T d\tau E(\tau)\cos(2T-t-\tau) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_t^T d\tau E(\tau)\sin(2T-t-\tau)$$
$$+ \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_t^T d\tau E(\tau)\sin(\tau-t) - \frac{3}{4\sqrt{2}}\cos(t)\int_t^T d\tau\int_0^\tau d\xi E(\xi)\cos(\xi)$$
$$- \frac{3}{4\sqrt{2}}\sin(t)\int_t^T d\tau\int_0^\tau d\xi E(\xi)\sin(\xi) \qquad (2.103)$$

Bu bağıntıda elde edilen son iki terim kesimsel tümlevleme ile çözülürse bağıntının son durumu bulunabilir.

$$\Re e\left(d_1^*(t)\mathrm{e}^{-\frac{it}{2}}\right) = -\frac{3}{2\sqrt{2}}\eta\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\tau-t)$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{2}}\eta\int_t^T d\tau E(\tau)\cos(\tau-t) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_t^T d\tau E(\tau)(T-\tau)\cos(\tau-t)$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\eta\int_t^T d\tau E(\tau)\cos(2T-t-\tau) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_t^T d\tau E(\tau)\sin(2T-t-\tau)$$
$$+ \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_t^T d\tau E(\tau)\sin(\tau-t) - \frac{3}{4\sqrt{2}}(T-t)\cos(t)\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\tau)$$
$$- \frac{3}{4\sqrt{2}}T\cos(t)\int_t^T d\tau E(\tau)\cos(\tau) - \frac{3}{4\sqrt{2}}(T-t)\sin(t)\int_0^t d\tau E(\tau)\sin(\tau)$$
$$- \frac{3}{4\sqrt{2}}T\sin(t)\int_t^T d\tau E(\tau)\sin(\tau) + \frac{3}{4\sqrt{2}}\cos(t)\int_t^T d\tau\tau E(\tau)\cos(\tau)$$
$$+ \frac{3}{4\sqrt{2}}\sin(t)\int_t^T d\tau\tau E(\tau)\sin(\tau) \qquad (2.104)$$

Dış alan genliği, $E(t)$, bağıntısı elde edilen bu sonuçlar ile birlikte gerekli yalınlaştırmalar da yapılarak

$$
\begin{aligned}
E(t) &= \int_0^t d\tau E(\tau)\left[-\eta\cos(t-\tau)+\eta\cos(2T-t-\tau)-\frac{1}{2}(T-t)\cos(t-\tau)\right.\\
&\quad\left.-\frac{1}{4}\sin(2T-t-\tau)+\frac{1}{4}\sin(t-\tau)\right]\\
&+ \int_t^T d\tau E(\tau)\left[-\eta\cos(t-\tau)+\eta\cos(2T-t-\tau)-\frac{1}{2}(T-\tau)\cos(t-\tau)\right.\\
&\quad\left.-\frac{1}{4}\sin(2T-t-\tau)+\frac{1}{4}\sin(\tau-t)\right] \qquad (2.105)
\end{aligned}
$$

olarak yazılabilir.

Elde edilen, $E(t)$ ile ilgili bağıntı, η'lı ve η'sız terimler olmak üzere ikiye ayırarak yeniden biçimlendirilirse

$$W_E(t)E(t) = \mathcal{L}_0(T)E(t) + \eta\mathcal{L}_1(T)E(t) \qquad (2.106)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikteki anlatımlara karşılık gelen çözümler aşağıdadır.

$$\mathcal{L}_0(T)E(t) \equiv \int_0^T d\tau \mathcal{K}_0(t,\tau,T)E(\tau) \qquad (2.107)$$

$$\mathcal{K}_0(t,\tau,T) \equiv \begin{cases} g_0(t,\tau,T), & 0 \le \tau \le t \\ g_0(\tau,t,T), & t \le \tau \le T \end{cases} \qquad (2.108)$$

$$g_0(t,\tau,T) \equiv \frac{1}{4}sin(t-\tau) - \frac{1}{4}sin(2T-t-\tau) - \frac{1}{2}(T-t)cos(t-\tau) \qquad (2.109)$$

$$\mathcal{L}_1(T)E(t) \equiv \int_0^T d\tau \mathcal{K}_1(t,\tau,T)E(\tau) \qquad (2.110)$$

$$\mathcal{K}_1(t,\tau,T) \equiv cos(2T-t-\tau) - cos(t-\tau) \qquad (2.111)$$

Çözümler özenle incelenirse elde edilen (2.107) ve (2.110) denklemlerinin birer tümlev denklem olduğu görülmektedir. Bu tümlev denklemlerin çekirdekleri sırasıyla (2.108) ve (2.111) eşitliklerinde verilmektedir. Bu tümlev denklemler dış alan genliğinin belirlenebilmesini sağlar. Bu denklemlere **alan denklemi** denilebilir. Alan denklemi η ölçekleyici bilinmeyenini içerir. Ayrıca, bu denklem salt $E(t)$ orantılı terimler içermesi nedeniyle bir özdeğer sorunudur. Elde edilen çekirdek oldukça yalın bir yapıdaymış gibi görünse de analitik çözümü bakımından oldukça karmaşıktır. Çözüm işlemleri sonucunda hem dış alan genliği, $E(t)$, hem de sapma parametresi, η, açık olarak ortaya çıkmaktadır. Dış alan genliği değeri belirsiz çarpımsal bir değişmeze sahiptir. Bu belirsiz değerli katsayının belirlenebilmesi için (2.2) ile verilen denklem kullanılabilir. Bu denklem güçsüz dış alan varsayımı altında birinci basamaktan saptırım açılımı kullanılarak yeniden yazılırsa, aşağıdaki biçime bürünür.

$$\frac{1}{2} = \tilde{O} \qquad (2.112)$$

Bu denklem doğasından dolayı **sapma denklemi** olarak adlandırılır. Hem alan denklemi hem de sapma denklemi birlikte gözönüne alınmalıdır. Öncelikle alan denkleminden $E(t)$ ve η belirlenir. Bu çözüm dış alan genliğinde belirsiz bir değişmez ortaya çıkarır. Sapma denklemi kullanılarak bu belirsiz değişmez uyumsuzluk olmaması durumunda çözülebilir.

BÖLÜM 3

ENİYİLEMELİ DENETİM SORUNUNUN EVRİM İŞLEÇLERİ İNDİRGEME YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜLMESİ

3.1 Evrim İşleçlerinin Çarpanlara Ayrılması

Anımsatma amacıyla dizgemizin Schrödinger denklemi yeniden yazılır ve

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = [H_0 - \mu E(t)]\,\psi(x,t) \tag{3.1}$$

denklemin **ket**'li anlatımı verilmek istenirse

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi(t)\right\rangle = [H_0 - \mu E(t)]\left|\psi(t)\right\rangle \tag{3.2}$$

(3.2) ile verilen denklem elde edilir. Bu denklemin **bra**'sı ise

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left\langle\psi(t)\right| = \left\langle\psi(t)\right|[H_0 - \mu E(t)] \tag{3.3}$$

denklemiyle verilebilir. Bu denklem, † imlemesi ile gösterilen, işleçlerin hem devriğinin hem de eşleniğinin alınması işlemi sonucunda elde edilmiştir. Ama belirtilmelidir ki, kendine eşlik özelliğinden dolayı, $[H_0 - \mu E(t)]^\dagger = [H_0 - \mu E(t)]$ olduğundan bu anlatım hem (3.2) ile hem de (3.3) ile verilen denklemde aynı kalmıştır. (3.2) ile verilen denklem ele alınarak $\left|\psi(t)\right\rangle$ anlatımı $t = 0$ noktasında dış alan genliği bir an için yoksayılarak Taylor serisine açıldığında

$$\left|\psi(t)\right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\left|\psi^{(k)}(0)\right\rangle \tag{3.4}$$

anlatımı elde edilir. Bu anlatım yine dış alan genliğini yoksayarak (3.2) denkleminde yerine yazılırsa,

$$i\hbar\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\left|\psi^{(k+1)}(0)\right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}H_0\left|\psi^{(k)}(0)\right\rangle \tag{3.5}$$

biçimindeki denklem elde edilmiş olur. Elde edilen bu denklemden özyineli bir ilişki yazılmak istendiğinde özyineli denklem

$$i\hbar\left|\psi^{(k+1)}(0)\right\rangle = H_0\left|\psi^{(k)}(0)\right\rangle, \qquad k = 0, 1, \cdots \tag{3.6}$$

biçiminde yazılabilir. Bu özyineli denklemde k yerine 0 değeri yerleştirildiğinde

$$i\hbar \left|\psi^{(1)}(0)\right\rangle = H_0 \left|\psi^{(0)}(0)\right\rangle \tag{3.7}$$

ve $\left|\psi^{(0)}(0)\right\rangle$ ile verilen anlatımı başlangıç koşulu ile verilen $|\psi(0)\rangle$ anlatımına eşit olduğundan

$$\left|\psi^{(1)}(0)\right\rangle = -\frac{i}{\hbar} H_0 \left|\psi(0)\right\rangle \tag{3.8}$$

denklemi elde edilir. k yerine 1 değeri yerleştirildiğinde

$$i\hbar \left|\psi^{(2)}(0)\right\rangle = H_0 \left|\psi^{(1)}(0)\right\rangle \tag{3.9}$$

yani,

$$\left|\psi^{(2)}(0)\right\rangle = \left(-\frac{i}{\hbar} H_0\right)^2 \left|\psi(0)\right\rangle \tag{3.10}$$

eşitliği elde edilir. Bulunan denklemlerden yararlanılarak genelleştirme yapılırsa,

$$\left|\psi^{(k)}(0)\right\rangle = \left(-\frac{i}{\hbar} H_0\right)^k \left|\psi(0)\right\rangle \tag{3.11}$$

eşitliği üretilmiş olur. Bu denklem (3.4) ile verilen eşitlikte yerine konulursa

$$\left|\psi(t)\right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left(-\frac{i}{\hbar} H_0\right)^k \left|\psi(0)\right\rangle \tag{3.12}$$

eşitliğine ulaşılır. Eğer,

$$U_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{it^k}{\hbar} H_0\right)^k = \mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar} H_0} \tag{3.13}$$

biçimli bir evrim işleci tanımlanırsa (3.12) eşitliği bu evrim işleci türünden

$$\left|\psi(t)\right\rangle = U_0(t) \left|\psi(0)\right\rangle \tag{3.14}$$

olarak yazılabilir. Buna göre (3.2) ile verilen denklemde dış alan genliği de göz önünde bulundurularak ψ dalga işlevinin **ket**'i

$$\left|\psi(t)\right\rangle = U(t) \left|\psi(0)\right\rangle \tag{3.15}$$

biçiminde yazıldığında, (3.2) denkleminin en son biçimi

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t) = \left[H_0 - \mu E(t)\right] U(t), \qquad U(0) = I \tag{3.16}$$

olarak elde edilir. (3.3) ile verilen denklem ise ψ dalga işlevinin **bra**'sı için $V(t)$ diğer bir evrim işleci olmak üzere

$$\left\langle\psi(t)\right| = \left\langle\psi(0)\right| V(t) \tag{3.17}$$

yazılarak

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}V(t) = V(t)\left[H_0 - \mu E(t)\right], \qquad V(0) = I \tag{3.18}$$

şekline gelir. (3.16) eşitliği soldan $V(t)$ ile (3.18) eşitliği sağdan $U(t)$ ile çarpılırsa

$$i\hbar V(t)\frac{\partial}{\partial t}U(t) = V(t)\left[H_0 - \mu E(t)\right]U(t) \tag{3.19}$$

ve

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}V(t)U(t) = V(t)\left[H_0 - \mu E(t)\right]U(t) \tag{3.20}$$

denklemlerine ulaşılır. Bu denklemler taraf tarafa çıkarılırsa

$$i\hbar\left[V(t)\frac{\partial}{\partial t}U(t) + \frac{\partial}{\partial t}V(t)U(t)\right] = 0 \tag{3.21}$$

ile çarpımın türevi yapısında elde edildiğinden, C bir değişmez işleci göstermek üzere

$$V(t)U(t) = C \tag{3.22}$$

elde edilir. $V(0)U(0) = I$ olduğundan $C = I$ ve buradan da

$$V(t)U(t) = I \tag{3.23}$$

sonucuna ulaşılır ki bu da $U(t)$ ve $V(t)$'nin **Birimsel**, (Unitary) işleç oldukları anlamına gelmektedir. Buna göre (3.13) denklemi de gözönünde bulundurularak evrim işleçlerinin çarpanlarından ilki aşağıdaki gibi yazılabilir

$$U_0(t) = \mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H_0}, \qquad V_0(t) = \mathrm{e}^{\frac{it}{\hbar}H_0} \tag{3.24}$$

Buradan $U(t)$'nin yapısı için $U_1(t)$ bu anda bilinmeyen bir işleç olmak üzere

$$U(t) = \mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H_0}U_1(t) \tag{3.25}$$

yazılıp $U_1(t)$'nin yapısı bulunmaya çalışıldığında (3.16) ile verilen denklemde $U(t)$ yerine konulur ve

$$i\hbar\left(-\frac{i}{\hbar}H_0\mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H_0}U_1(t) + \mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H_0}\frac{\partial U_1(t)}{\partial t}\right) = \left[H_0 - E(t)\mu\right]\mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H_0}U_1(t) \tag{3.26}$$

biçimindeki gibi türevi alınırsa her iki taraftaki ilk terimler birbirini götüreceğinden

$$i\hbar\mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H_0}\frac{\partial U_1(t)}{\partial t} = -E(t)\mu\mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H_0}U_1(t) \tag{3.27}$$

biçimindeki denklem elde edilir. Burada her iki taraf $\mathrm{e}^{\frac{it}{\hbar}H_0}$ işleci ile sağdan çarpıldığında, ise $E(t)$ dış alan genliği H_0 işleçine bağlı olmadığından,

$$i\hbar\frac{\partial U_1(t)}{\partial t} = -E(t)\mathrm{e}^{\frac{it}{\hbar}H_0}\mu\mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H_0}U_1(t) \tag{3.28}$$

eşitliğinde olduğu gibi, yeri değiştirilebilir. $\mathrm{e}^{\frac{it}{\hbar}H_0}\mu\mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H_0}$ anlatımının kolayca belirlenebilmesi için anlatım $P(t)$ olarak adlandırılır ve μ değeri yerine yerleştirilirse

$$P(t)=\left(\mathrm{e}^{\frac{it}{\hbar}H_0}\mu\mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H_0}\right)=\mathrm{e}^{\frac{it}{\hbar}H_0}x\mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H_0} \tag{3.29}$$

yazılabilir. Bu anlatımın yapısının bulunabilmesi için çözüm yollarından biri türevini almaktır. $P(t)$'nin birinci türevi alındığında

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}P(t) &= \frac{i}{\hbar}H_0\mathrm{e}^{\frac{it}{\hbar}H_0}\mu\mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H_0}+\mathrm{e}^{\frac{it}{\hbar}H_0}\mu\left(-\frac{i}{\hbar}H_0\right)\mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H_0}\\ &= \frac{i}{\hbar}\mathrm{e}^{\frac{it}{\hbar}H_0}\left(H_0\mu-\mu H_0\right)\mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H_0}\end{aligned} \tag{3.30}$$

sonucuna erişilir. Burada $(H_0\mu-\mu H_0)$ anlatımının belirlenmesi gerektiği görülmektedir. Bu anlatım işleçlerden oluşmaktadır ve belirlenmesinin en iyi yolu bir f işlevine etkisinin nasıl bir davranış gösterdiğinin saptanması olarak düşünülebilir. Bu söylenenler yapılırsa

$$\begin{aligned}H_0\mu f=H_0xf &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(f+x\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}x^3f\\ &= -\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{1}{2}x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{1}{2}x^3f\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\mu H_0f=x\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{2}x^2\right)f=-\frac{1}{2}x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{1}{2}x^3f \tag{3.32}$$

$$H_0\mu-\mu H_0=-\frac{\partial}{\partial x} \tag{3.33}$$

sonucuna erişilir ve $(H_0\mu-\mu H_0)$ anlatımının $-\frac{\partial}{\partial x}$ gibi bir davranış gösterdiği anlaşılır. Bu sonuç $P(t)$'nin için tam bir yarar sağlayamayacağından türevleme işlemi sürdürülürse $P(t)$'nin ikinci türevi

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}P(t) &= \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2H_0\mathrm{e}^{\frac{it}{\hbar}H_0}\left(H_0\mu-\mu H_0\right)\mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H_0}\\ &+ \frac{i}{\hbar}\mathrm{e}^{\frac{it}{\hbar}H_0}\left(H_0\mu-\mu H_0\right)\left(-\frac{i}{\hbar}H_0\right)\mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H_0}\\ &= \frac{1}{\hbar^2}\mathrm{e}^{\frac{it}{\hbar}H_0}\left[-H_0\left(H_0\mu-\mu H_0\right)+\left(H_0\mu-\mu H_0\right)H_0\right]\mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H_0}\end{aligned} \tag{3.34}$$

olarak bulunmuş olur. Aynı mantıkla ilerlenirse $\left[-H_0\left(H_0\mu-\mu H_0\right)+\left(H_0\mu-\mu H_0\right)H_0\right]$ anlatımının davranışının belirlenmesi gerektiği görülür ve herhangi bir f işlevine etki ettirildiğinde,

$$\begin{aligned}-H_0\left(H_0\mu-\mu H_0\right)f &= -\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{2}x^2\right)\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)f\\ &= -\frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\frac{1}{2}x^2\frac{\partial f}{\partial x}\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$
\begin{aligned}
\left(H_0\mu-\mu H_0\right)H_0 f &= \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{2}x^2\right)f \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}-\frac{1}{2}\left(2xf+x^2\frac{\partial f}{\partial x}\right)
\end{aligned} \tag{3.36}
$$

sonuçlarına ulaşılacağından

$$
\left[-H_0\left(H_0\mu-\mu H_0\right)+\left(H_0\mu-\mu H_0\right)H_0\right]=-x \tag{3.37}
$$

anlatımı elde edilir. Elde edilen sonucun kullanımıyla

$$
\frac{\partial^2}{\partial t^2}P(t)=\frac{1}{\hbar^2}\mathrm{e}^{\frac{it}{\hbar}H_0}(-x)\mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H_0} \tag{3.38}
$$

yazılabileceği ve buradan da

$$
P(0)=x, \qquad\qquad P'(0)=-i\frac{\partial}{\partial x} \tag{3.39}
$$

başlangıç koşulları altında

$$
\frac{\partial^2 P(t)}{\partial t^2}=-\frac{1}{\hbar^2}P(t) \tag{3.40}
$$

yapısında ikinci basamaktan işleç değerli türevli bir denklem elde edilebileceği açıktır. Elde edilen bu türevli denklem verilen başlangıç koşulları altında çözüldüğünde çözüm

$$
P(t)=\sin(\frac{t}{\hbar})\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)+\cos\left(\frac{t}{\hbar}\right)x \tag{3.41}
$$

olarak bulunur. Bulunan sonuç (3.29) ile verilen denklemde yerine yerleştirilirse

$$
i\hbar\frac{\partial U_1}{\partial t}=\left[-E(t)\sin\left(\frac{t}{\hbar}\right)\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)-E(t)\cos\left(\frac{t}{\hbar}\right)x\right]U_1(t) \tag{3.42}
$$

denklemi elde edilir. Eğer,

$$
i\hbar\frac{\partial\overline{U}_1}{\partial t}=-E(t)\cos\left(\frac{t}{\hbar}\right)x\overline{U}_1 \tag{3.43}
$$

olacak biçimde bir $\overline{U}_1$ işleçi tanımlanır ve gerekli yalınlaştırmalar yapılarak

$$
\frac{\partial\overline{U}_1}{\partial t}=\frac{i}{\hbar}E(t)\cos(\frac{t}{\hbar})x\overline{U}_1, \qquad \overline{U}_1(0)=I \tag{3.44}
$$

yapısında oluşan birinci basamaktan türevli denklem birlikte verilen başlangıç koşulu altında çözülürse

$$
\overline{U}_1=\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})x} \tag{3.45}
$$

sonucuna ulaşılır. Buna göre $U_1(t)$

$$
U_1(t)=\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})x}U_2(t) \tag{3.46}
$$

yapısında bilinmeyen yeni bir işleç türünden yazılabilir. Bu anlatım (3.42) ile verilen türevli denklemde yerine konulursa,

$$i\hbar\left[\frac{d}{dt}\left(\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})x}\right)U_2(t)+\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})x}\frac{\partial U_2(t)}{\partial t}\right]$$
$$=-E(t)\sin(\frac{t}{\hbar})\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})x}U_2(t)$$
$$-E(t)\cos(\frac{t}{\hbar})x\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})x}U_2(t) \qquad (3.47)$$

denklemi elde edilir ve türev alınarak işlem sürdürülürse

$$i\hbar\frac{i}{\hbar}E(t)\cos(\frac{t}{\hbar})x\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})x}U_2(t)+i\hbar\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})x}\frac{\partial U_2(t)}{\partial t}$$
$$=-E(t)\sin(\frac{t}{\hbar})\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})x}U_2(t)$$
$$-E(t)\cos(\frac{t}{\hbar})x\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})x}U_2(t) \qquad (3.48)$$

eşitliğinin her iki tarafında bulunan ilk terimler eşit olduğundan gerekli yalınlaştırmalar yapılarak,

$$i\hbar\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})x}\frac{\partial U_2(t)}{\partial t}=-E(t)\sin(\frac{t}{\hbar})\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})x}U_2(t) \qquad (3.49)$$

denklemi elde edilir. Denklemin her iki tarafı soldan $\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})x}$ ile çarpılırsa

$$i\hbar\frac{\partial U_2(t)}{\partial t}=-E(t)\sin(\frac{t}{\hbar})\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})x}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})x}U_2(t) \qquad (3.50)$$

denklemi elde edilmiş olur. Burada yine $\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})x}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})x}$ işlecinin davranışının incelenmesi gerekir. Bunun için bu işleç yine herhangi bir f işlevine uygulanırsa,

$$\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})x}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})x}f=\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})x}(-i)\times$$
$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})x\right)\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})x}f+\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})x}\right]$$
$$=\frac{1}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})f-i\frac{\partial f}{\partial x} \qquad (3.51)$$

eşitliği elde edilir ve bu eşitlikte yer alan türev işlemleri gerçekleştirilirse eşitlik

$$\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})x}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})x}=-i\frac{\partial}{\partial x}+\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar}) \qquad (3.52)$$

durumuna gelir. Bu yapı ile verilen denklemde yerine konulursa

$$i\hbar\frac{\partial U_2(t)}{\partial t}=\left[-E(t)\sin\left(\frac{t}{\hbar}\right)\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)-E(t)\sin\left(\frac{t}{\hbar}\right)\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})\right]U_2(t) \qquad (3.53)$$

denklemine ulaşılır. $U_2(t)$ işleci

$$U_2(t) = \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\sin(\frac{\tau}{\hbar})\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)}U_3(t) \tag{3.54}$$

şeklinde tanımlanarak (3.53) ile verilen türevli denklemde yerine konulursa denklem

$$\begin{aligned}
& i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\sin(\frac{\tau}{\hbar})\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)}\right)U_3(t) + i\hbar\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\sin(\frac{\tau}{\hbar})\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)}\frac{\partial U_3(t)}{\partial t} \\
& = -E(t)\sin(\frac{t}{\hbar})\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\sin(\frac{\tau}{\hbar})\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)}U_3(t) \\
& -E(t)\sin(\frac{t}{\hbar})\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\sin(\frac{\tau}{\hbar})\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)}U_3(t)
\end{aligned} \tag{3.55}$$

yapısına bürünür. Denklemde var olan türevler alınarak

$$\begin{aligned}
& i\hbar\left(\frac{i}{\hbar}E(t)\sin(\frac{t}{\hbar})\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\sin(\frac{\tau}{\hbar})\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)}U_3(t) \\
& +i\hbar\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\sin(\frac{\tau}{\hbar})\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)}\frac{\partial U_3(t)}{\partial t} \\
& = -E(t)\sin(\frac{t}{\hbar})\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\sin(\frac{\tau}{\hbar})\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)}U_3(t) \\
& -E(t)\sin(\frac{t}{\hbar})\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\sin(\frac{\tau}{\hbar})\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)}U_3(t)
\end{aligned} \tag{3.56}$$

ve gerekli yalınlaştırmalar yapılarak denklem

$$\frac{\partial U_3(t)}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}E(t)\sin(\frac{t}{\hbar})\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})U_3(t) \tag{3.57}$$

biçiminde elde edilir. $U_3(t)$ işleci

$$U_3(t) = \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\xi E(\xi)\sin(\frac{\xi}{\hbar})\int_0^\xi d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})}U_4(t) \tag{3.58}$$

olarak tanımlanıp (3.57) ile verilen türevli denklemde yerine yerleştirilirse,

$$\begin{aligned}
& i\hbar\left(\frac{i}{\hbar}\right)E(t)\sin(\frac{t}{\hbar})\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\xi E(\xi)\sin(\frac{\xi}{\hbar})\int_0^\xi d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})}U_4(t) \\
& +i\hbar\frac{\partial U_4(t)}{\partial t}\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\xi E(\xi)\sin(\frac{\xi}{\hbar})\int_0^\xi d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})} \\
& = -E(t)\sin(\frac{t}{\hbar})\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\xi E(\xi)\sin(\frac{\xi}{\hbar})\int_0^\xi d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})}U_4(t)
\end{aligned} \tag{3.59}$$

denklemine erişilir. Burada gerekli işlemler yapılırsa denklem yalın bir biçimde

$$i\hbar\frac{\partial U_4(t)}{\partial t}\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\xi E(\xi)\sin(\frac{\xi}{\hbar})\int_0^\xi d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})} = 0 \tag{3.60}$$

olarak elde edilir. Bu sonuç $U_4(t)$ işlecinin

$$U_4(t) = I \tag{3.61}$$

yapısında olacağı anlamını taşıdığından (3.26) ile verilen denklem, sonunda,

$$U(t) = U_0(t)U_1(t)U_2(t)U_3(t) \tag{3.62}$$

olarak elde edilmiş olur. Bulunan tüm sonuçlar yukarıdaki denklemde yerine konulursa $U(t)$ evrim işleci

$$U(t) = \mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H_0}\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})x}\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau E(\tau)\sin(\frac{\tau}{\hbar})\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)}\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\xi E(\xi)\sin(\frac{\xi}{\hbar})\int_0^{\xi} d\tau E(\tau)\cos(\frac{\tau}{\hbar})} \tag{3.63}$$

şeklinde çarpanlara ayrılmış olur.

3.2 Evrim İşleçlerinin Çarpanları Aracılığıyla Denklemlerin Çözülmesi

Kuvantum Mekaniği'nde daha önce belirtildiği üzere

$$J = J(\psi, \lambda, \eta, E) \tag{3.64}$$

şeklinde ψ dalga işlevine, λ eşdüzey işlevine, η sapma değiştirgenine ve E dış alan genliğine bağlı bir amaç işlevsisinin varyasyoneli aşağıdaki gibi sıfıra eşitlenerek,

$$\frac{\delta J}{\delta\psi}\delta\psi + \frac{\delta J}{\delta\psi*}\delta\psi* + \frac{\delta J}{\delta\lambda}\delta\lambda + \frac{\delta J}{\delta\lambda*}\delta\lambda* + \frac{\delta J}{\delta\eta}\delta\eta + \frac{\delta J}{\delta E}\delta E = 0 \tag{3.65}$$

eniyilemeli denetim denklemlerine ulaşılmıştır. Amaç işlevsisinin sıfıra eşit olması demek verilen denklemdeki katsayıların ayrı ayrı sıfıra eşit olması anlamına gelmektedir. Buna göre

$$\frac{\delta J}{\delta\psi} = 0, \qquad \frac{\delta J}{\delta\psi*} = 0, \qquad \frac{\delta J}{\delta\lambda} = 0, \qquad \frac{\delta J}{\delta\lambda*} = 0, \qquad \frac{\delta J}{\delta\eta} = 0, \qquad \frac{\delta J}{\delta E} = 0 \tag{3.66}$$

eşitlikleri geçerlidir.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = [H_0 - E(t)\mu]\,\psi(x,t) \tag{3.67}$$

ile verilen Schrödinger denkleminin çözülebilmesi için $\psi(x,t)\,|_{t=0}$ değerinin verilmesi gerekmektedir. Eğer

$$\psi(x_1, \cdots, x_N, t) \to |\psi(t)\rangle \tag{3.68}$$

$$\psi^*(x_1, \cdots, x_N, t) \to \langle\psi(t)| \tag{3.69}$$

karşılıkları düşünülecek olursa

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,|\psi(t)\rangle = [H_0 - E(t)\mu]\,|\psi(t)\rangle \tag{3.70}$$

$$t \in [0,T] \qquad |\psi(0)\rangle = |in\rangle \tag{3.71}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\lambda(t)\right\rangle = [H_0 - E(t)\mu]\left|\lambda(t)\right\rangle - W_p(t)\langle\,\psi(t)|\,\hat{O}'\left|\psi(t)\right\rangle \tag{3.72}$$

$$\left|\lambda(T)\right\rangle = -\frac{i}{\hbar}\eta\hat{O}\left|\psi(T)\right\rangle, \qquad t\in[0,T] \tag{3.73}$$

$$W_E(t)E(t) = 2\Re e\left(\langle\lambda(t)\,|\mu|\,\psi(t)\rangle\right) \tag{3.74}$$

$$\langle\,\psi(T)|\,\hat{O}\left|\psi(T)\right\rangle = \tilde{O} + \delta_{j1} + \eta \tag{3.75}$$

denklemleri yazılabilmektedir. Son eşitlikte $j = 0$ ise kesin erişim $j = 1$ ise olabildiğince iyi erişim durumu söz konusudur. $U(t)$ evrim işleci olmak üzere

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t) &= [H_0 - E(t)\mu]\,U(t) \\ U(0) &= I, \qquad t\in[0,T] \end{aligned} \tag{3.76}$$

H_0 işleci kendine eş olduğundan

$$H_0^\dagger = H_0 \tag{3.77}$$

eşitliğini sağlar. μ için de, çarpma işleci olduğundan dolayı, aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$\mu^\dagger(x) = \mu(x) \tag{3.78}$$

$$\begin{aligned} -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t)^\dagger &= U(t)^\dagger\,[H_0 - E(t)\mu] \\ U(0)^\dagger &= I, \qquad t\in[0,T] \end{aligned} \tag{3.79}$$

(3.76) denklemi $U(t)^\dagger$ işleci ile sağdan (3.79) denklemi $U(t)$ işleci ile soldan çarpılıp taraf tarafa çıkarıldığında aşağıdaki denklem elde edilir.

$$i\hbar U(t)^\dagger\left(\frac{\partial}{\partial t}U(t)\right) + i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t}U(t)^\dagger\right)U(t) = 0 \tag{3.80}$$

(3.80) denkleminin iki işlecin çarpımının türevi yapısında olduğu düşünülürse

$$i\hbar\left(U(t)^\dagger U(t)\right) = 0 \tag{3.81}$$

denklemine eşdeğer olacağı açıktır. Buradan

$$U(t)^\dagger U(t) = \mathcal{C}, \qquad t\in[0,T] \tag{3.82}$$

sonucu elde edilir. Daha önce verilen $U(0) = I$ ve $U(0)^\dagger = I$ bağıntıları, yani her iki işlecin de $t = 0$ anında birim işlece eşit olduğu, gözönünde tutularak,

$$\mathcal{C} = I \tag{3.83}$$

sonucuna varılır. Bu sonuç (3.82) denkleminde yerine yerleştirilirse

$$U(t)^\dagger U(t) = I \tag{3.84}$$

bağıntısı elde edilir. (3.84) ile verilen eşitliğin sağlanması $U(t)$ ve $U(t)^\dagger$'nin birimsel (unitary) işleç olması demektir. Yani bu işleçler her zaman aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$U(t)^\dagger = U(t)^{-1} \tag{3.85}$$

Daha önce belirtilen dalga işlevine ait başlangıç işlevinin **ket**'ini belirleyen $|\psi(0)\rangle$ işlevi $|in\rangle$ biçiminde, başlangıç koşulunun İngilizce karşılığı olan "initial condition" anlatımının ilk iki simgesi kullanılarak, betimlenecek olursa dalga işlevinin **ket**'i için

$$|\psi(t)\rangle = U(t)\,|in\rangle \tag{3.86}$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen bu bağıntıya göre aşağıda verilen eşitliği yazmak olanaklıdır.

$$[H_0 - E(t)\mu]\,U(t)\,|in\rangle = i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t}U(t)\right)|in\rangle \tag{3.87}$$

Eşitliğin sağ tarafındaki $|in\rangle$ anlatımının t zaman değiştirgenine bağımlılığı olmaması nedeni ile

$$i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t}U(t)\right)|in\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(U(t)\,|in\rangle\right) \tag{3.88}$$

yazılabilir ki kolayca görülebildiği üzere (3.86) ile verilen bağıntı (3.88) kullanıldığında

$$[H_0 - E(t)\mu]\,|\psi(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,|\psi(t)\rangle \tag{3.89}$$

denklemine ulaşılmış olur. Bu denklem bildiğimiz ve tanıdığımız Schrödinger denklemidir ve böylece kanıtlanmış olunur ki (3.80) ve (3.86) denklemlerini yazabilir ve kullanabiliriz. Aynı biçimde dalga işlevinin **bra**'sı alındığında

$$\langle\psi(t)| = \langle in|\,U(t)^\dagger \tag{3.90}$$

denklemi elde edilir. Burada $U(t)$ evrim işlecinin yerine $U(t)^\dagger$ işleci gelmelidir. Çünkü yazında (literatür) işleçlerin eşleniklerinin devriği işleçlerin üzerine kama † simgesi getirilerek gösterilir.

Aynı mantık kullanılarak geriye doğru evrim işlecini betimleyen eşdüzey işlevi için de benzer denklem yazılırsa

$$|\lambda(t)\rangle = U(t)\,|\bar{\lambda}(t)\rangle \tag{3.91}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem (2.24) ile verilen geriye doğru evrimi betimleyen eşdüzey işlevine ait denklemde yerine konulursa,

$$\begin{aligned} i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t}U(t)\right)|\bar{\lambda}(t)\rangle \quad &+ \quad i\hbar\left(U(t)\frac{\partial}{\partial t}\right)|\bar{\lambda}(t)\rangle = \\ [H_0 - \mu E(t))]\,U(t)\,|\bar{\lambda}(t)\rangle \quad &- \quad W_p(t)\langle in|\,U(t)^\dagger\hat{\mathcal{O}}'U(t)\,|in\rangle\hat{\mathcal{O}}'U(t)\,|in\rangle \end{aligned} \tag{3.92}$$

yapısına bürünür. Bu denklemde aşağıda $U(t)$'nin sağladığı denklemden elde edilebilen eşitlik kullanılırsa

$$i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t}U(t)\right)\left|\bar{\lambda}(t)\right\rangle = \left[H_0 - \mu E(t)\right)]\,U(t)\left|\bar{\lambda}(t)\right\rangle \tag{3.93}$$

ve yalınlaştırmalar yapılırsa

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\bar{\lambda}(t)\right\rangle = -W_p(t)\langle in|\,U(t)^{\dagger}\hat{\mathcal{O}}'U(t)\,|in\rangle U(t)^{\dagger}\hat{\mathcal{O}}'U(t)\,|in\rangle \tag{3.94}$$

yapısına ulaşır. Bu denklemde her iki tarafın tümlevi alınırsa

$$\left|\bar{\lambda}(T)\right\rangle - \left|\bar{\lambda}(t)\right\rangle = \frac{i}{\hbar}\int_t^T d\tau W_p(\tau)\langle in|\,U(\tau)^{\dagger}\hat{\mathcal{O}}'U(\tau)\,|in\rangle U(\tau)^{\dagger}\hat{\mathcal{O}}'U(\tau)\,|in\rangle \tag{3.95}$$

denklemi elde edilir. (3.91) gözönüne alındığında aşağıdaki ilişkinin doğruluğu açıktır.

$$|\lambda(T)\rangle = U(t)\left|\bar{\lambda}(T)\right\rangle \tag{3.96}$$

Buradan $U(t)^{\dagger} = U(t)^{-1}$ ilişkisinden yararlanarak

$$\left|\bar{\lambda}(T)\right\rangle = U(t)^{\dagger}\,|\lambda(T)\rangle \tag{3.97}$$

eşitliği yazılabilir. (2.25), (3.91) ve (3.97) eşitliklerinden yararlanılarak (3.94) denklemi yeniden yazılırsa,

$$\begin{aligned} |\lambda(t)\rangle &= U(t)U(T)^{\dagger}\left[-\frac{i}{\hbar}\eta\hat{\mathcal{O}}U(T)\,|in\rangle\right] \\ &- \frac{i}{\hbar}\int_t^T d\tau W_p(\tau)\langle in|\,U(\tau)^{\dagger}\hat{\mathcal{O}}'U(\tau)\,|in\rangle U(t)U(\tau)^{\dagger}\hat{\mathcal{O}}'U(\tau)\,|in\rangle \end{aligned} \tag{3.98}$$

eşitliğine ulaşılır. Bundan sonra köprü denklemi olarak adlandırılan eşdüzey ve dalga işlevlerine bağlı olan denklemin indirgenmesine geçilebilir. Ama daha önce işlemlerin kolaylığı açısından

$$Q_1(t) = U(t)^{\dagger}\mu U(t) \tag{3.99}$$

$$Q_2(t) = U(t)^{\dagger}\hat{O}U(t) \tag{3.100}$$

$$Q_3(t) = U(t)^{\dagger}\hat{O}'U(t) \tag{3.101}$$

eşitlikleriyle kendine eş işleçler tanımlanmasında yarar bulunmaktadır. Tanımlanan işleçler kullanılarak (3.98) denklemi yeniden yapılandırılırsa

$$\begin{aligned} |\lambda(t)\rangle &= -\frac{i}{\hbar}\eta U(t)Q_2(T)\,|in\rangle \\ &- \frac{i}{\hbar}\int_t^T d\tau W_p(\tau)\langle in|\,Q_3(\tau)\,|in\rangle U(t)Q_3(\tau)\,|in\rangle \end{aligned} \tag{3.102}$$

elde edilir. Artık köprü denklemi içerisindeki $\langle \lambda(t) | \mu | \psi(t) \rangle$ teriminin belirlenmesine geçilebilir. Bu terim

$$\langle \lambda(t) | \mu | \psi(t) \rangle = \langle \lambda(t) | \mu U(t) | in \rangle \tag{3.103}$$

eşitliğinde sağ yanda verilen terime eşittir. Bu terim daha önce verilen denklemler ve (3.99) bağıntısı ile verilen işleç de işin içine katılarak

$$\begin{aligned}
&\langle \lambda(t) | \mu U(t) | in \rangle = \\
= \; & \frac{i}{\hbar}\eta \langle in | Q_2(T) U(t)^\dagger \mu U(t) | in \rangle \\
+ \; & \frac{i}{\hbar} \int_t^T d\tau W_p(\tau) \langle in | Q_3(\tau) | in \rangle \langle in | Q_3(\tau) U(t)^\dagger \mu U(t) | in \rangle \\
= \; & \frac{i}{\hbar}\eta \langle in | Q_2(T) Q_1(t) | in \rangle \\
+ \; & \frac{i}{\hbar} \int_t^T d\tau W_p(\tau) \langle in | Q_3(\tau) | in \rangle \langle in | Q_3(\tau) Q_1(t) | in \rangle
\end{aligned} \tag{3.104}$$

yapısında yazılabilir. Asıl ulaşılmak istenen $2\Re e \left(\langle \lambda(t) | \mu | \psi(t) \rangle \right)$ terimine ise $\langle \lambda(t) | \mu | \psi(t) \rangle$ teriminin eşleniği alınıp kendisi ile toplanarak ulaşılır ve sonuç aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
&2\Re e \left(\langle \lambda(t) | \mu | \psi(t) \rangle \right) = \\
= \; & \eta \langle in | \frac{i}{\hbar} \left(Q_2(T) Q_1(t) - Q_1(t) Q_2(T) \right) | in \rangle \\
+ \; & \int_t^T d\tau W_p(\tau) \langle in | Q_3(\tau) | in \rangle \langle in | \frac{i}{\hbar} \left(Q_3(\tau) Q_1(t) - Q_1(t) Q_3(\tau) \right) | in \rangle
\end{aligned} \tag{3.105}$$

$[A, B]$ gösterilimi AB çarpımları ile BA çarpımlarının farkına özdeştir ve yazında A ve B'nin **Komütatör**'ü (commutator) olarak adlandırılır.

$$[A, B] = AB - BA \tag{3.106}$$

$\{A, B\}$ ise **Poisson Simgelemesi** olarak adlandırılır ve $\frac{i}{\hbar}$ anlatımı ile komütatörün çarpımına eşittir.

$$\{A, B\} = \frac{i}{\hbar}[A, B] = \frac{i}{\hbar}(AB - BA) \tag{3.107}$$

Poisson Simgelemeleri herhangi A, B, C işleçleri için aşağıda verilen eşitlikleri sağlarlar.

$$\{A, A\} = 0 \tag{3.108}$$

$$\{A, I\} = \{I, A\} = 0 \tag{3.109}$$

$$\{f(A), g(A)\} = 0 \tag{3.110}$$

$$\{A, B\} = -\{B, A\} \tag{3.111}$$

$$\{AB, C\} = A\{B, C\} + \{A, C\}B \tag{3.112}$$

$$\{A, BC\} = B\{A, C\} - \{A, B\}C \tag{3.113}$$

$$\{AB + BA, C\} = A\{B, C\} + \{B, C\}A + B\{A, C\} + \{A, C\}B \tag{3.114}$$

$$\{A^2, B\} = A\{A, B\} + \{A, B\}A \tag{3.115}$$

$$\{A, B^2\} = B\{A, B\} + \{A, B\}B \tag{3.116}$$

Poisson Simgelemesi gösterilimi (3.105) denkleminde kullanılır ve ulaşılan yapı yazılırsa

$$\begin{aligned} W_E(t)E(t) &= \eta\langle in| \{Q_2(T)Q_1(t)\} |in\rangle \\ &+ \int_t^T d\tau W_p(\tau)\langle in| Q_3(\tau) |in\rangle\langle in| \{Q_3(\tau)Q_1(t)\} |in\rangle \end{aligned} \tag{3.117}$$

biçimindeki "denetim denklemi" elde edilmiş olur. "Erişim denklemi" yazılmak istendiğinde ise

$$\left\langle \psi(T) \middle| \hat{O} \middle| \psi(T) \right\rangle = \tilde{O} + \delta_{j1}\eta \tag{3.118}$$

eşitliğinde (3.86) ile verilen bağıntı kullanılarak

$$\langle in| U(T)^\dagger \hat{O} U(T) |in\rangle = \tilde{O} + \delta_{j1}\eta \tag{3.119}$$

denklemi elde edilir. (3.100) ile verilen bağıntı elde edilen denklemde yerine yerleştirilirse, denklem

$$\langle in| Q_2(T) |in\rangle = \tilde{O} + \delta_{j1}\eta \tag{3.120}$$

biçimini alır.

Bundan sonra denklemlerin daha da indirgenerek cebirsel bir yapıdaki son durumunun elde edilmesi için ilerlenmelidir. Ama ilerlemeden önce bir takım varsayımların yapılması gerekmektedir. Bunun için işleçlerden oluşmuş kapalı bir $\mathcal{S}_\Omega$ kümesi ele alınmalı ve bu küme, $\Omega_1, \cdots, \Omega_n$ doğrusal bağımsız taban işleçler olmak üzere,

$$\mathcal{S}_\Omega = \left\{ \Omega \middle| \left(\Omega = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \Omega_j \right) \wedge_{j=1}^{n} \alpha_j \in \mathcal{C} \;\wedge\; n \in Z^+ \;\wedge_{j=1}^{n}\; \Omega_j^\dagger = \Omega_j \right\} \tag{3.121}$$

tanımıyla verilmelidir.

Sorunumuzdaki veriler Hamilton işleci $H_0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}x^2$, ikikutup işlevi $\mu = x$, amaç işleci $\hat{O} = x^2$, yaptırım işleci $\hat{O}' = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ olmak üzere aşağıdaki varsayımlar yapılırsa sorunumuz S_Ω üzerinde kapalı duruma gelir.

(1) $\{H_0, \Omega_j\} \in \mathcal{S}$ olmak üzere $\{H_0, \Omega_j\} = \sum\limits_{k=1}^{n} A_{jk}^{H_0}\, \Omega_j$

(2) $\{\mu, \Omega_j\} \in \mathcal{S}$ olmak üzere $\{\mu, \Omega_j\} = \sum_{k=1}^{n} A^{\mu}_{jk}\, \Omega_j$

(3) $\mu \in \mathcal{S}$ olmak üzere $\mu = \sum_{j=1}^{n} b^{\mu}_{j}\, \Omega_j$

(4) $\hat{O} \in \mathcal{S}$ olmak üzere $\hat{O} = \sum_{j=1}^{n} b^{\hat{O}}_{j}\, \Omega_j$

(5) $\hat{O}' \in \mathcal{S}$ olmak üzere $\hat{O}' = \sum_{j=1}^{n} b^{\hat{O}'}_{j}\, \Omega_j$

Bu varsayımlar altında sorunumuzun çözümü için önce Poisson Simgelemelerinin oluşturulması gerekmektedir. Daha önceden de belirtildiği gibi çözüm sırasında $\hbar = 1$ olarak alınacaktır. $\Omega_1 = x$, $\Omega_2 = x^2$, $\Omega_3 = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ olmak üzere Poisson Simgelemeleri aşağıdaki biçimde oluşturulabilir.

$$\begin{aligned} \{H_0, \Omega_1\} = \{H_0, x\} &= \left\{-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}x^2, x\right\} = \\ &- \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}x^2, x\right\} + \frac{1}{2}\left\{x^2, x\right\} \end{aligned} \tag{3.122}$$

$\{x^2, x\}$ anlatımı cebirsel işleç olduğundan ve cebirsel işleçlerin Poisson Simgelemeleri sıfır olduğundan $\{x^2, x\} = 0$ olur ve $\{H_0, x\}$

$$\{H_0, x\} = \left\{-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}, x\right\} = -\frac{1}{2}i\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}x - x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \tag{3.123}$$

yapısında bulunur. $\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}, x\right]$ biçimindeki işleçlerin komütatörlerinin nasıl davranacağını belirlemek için bu anlatım bir işleve etki ettirilerek

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}, x\right] f &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}x - x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) f \\ &= 2\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\frac{\partial f}{\partial x} \end{aligned} \tag{3.124}$$

bulunur. O halde $\{H_0, x\}$,

$$\{H_0, x\} = -\frac{1}{2}i\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}, x\right] = -i\frac{\partial}{\partial x} \tag{3.125}$$

ile verilmelidir.

Birinci varsayımımıza dayanarak işlem sürdürülmek istenilirse, $\{H_0, \Omega_2\}$ teriminin belirlenmesi gerekir.

$$\{H_0, \Omega_2\} = \{H_0, x^2\} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}, x^2\right\} + \frac{1}{2}\left\{x^2, x^2\right\} \tag{3.126}$$

$\{x^2, x^2\}$ anlatımı yine bir cebirsel işleç olduğundan sıfıra eşittir. O zaman

$$\{H_0, x^2\} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}, x^2\right\} \tag{3.127}$$

yazılabilir ve daha önce belirtildiği üzere komütatör yardımıyla belirlenirse,

$$\{H_0, x^2\} = i\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}, x^2\right] \tag{3.128}$$

bulunur. Burada anlatımın içindeki komütatör belirlenip i ile çarpılarak sonuca ulaşılır. Bu durumda komütatör yine bir f işlevine etki ettirilerek davranışı belirlenmeye çalışıldığında

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}, x^2\right] f &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}x^2 - x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) f \\ &= 2\left(I + 2x\frac{\partial}{\partial x}\right) f\end{aligned} \tag{3.129}$$

komütatörün eşiti $2\left(I + 2x\frac{\partial}{\partial x}\right)$ olarak bulunduğundan bu sonuç (3.128) denkleminde verildiği gibi i ile çarpıldığında $\{H_0, x^2\}$

$$\{H_0, x^2\} = -\frac{i}{2}2\left(I + 2x\frac{\partial}{\partial x}\right) = -iI + 2x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{3.130}$$

olarak bulunur. Bulunan sonuç kendine eş değildir. Ama sonucun kendine eş olması yeğlenen bir durumdur. Çünkü bu işleçlerin beklenen değerleri alındığında sonucun, gözlemlenebilir bir özelliğe karşılık olması için, gerçel çıkması gerekir. Bu da, beklenen değerleri alınacak işleçlerin kendine eş olmasını gerektirir. O halde

$$\left(\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)x - x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right) f = -i\left(f + x\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -if \tag{3.131}$$

olduğundan

$$-iI = \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)x - x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{3.132}$$

sonucuna ulaşılır. (3.130) ile gösterilen denklemde $-iI$ yerine yukarıda verilen eşiti yazılırsa,

$$\begin{aligned}\{H_0, x^2\} &= \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)x - x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) + 2x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) \\ &= \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)x + x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\end{aligned} \tag{3.133}$$

bulunur. Bulunan bu sonuca göre $\mathcal{S}_\Omega$ uzayının kapalı olmadığı görülür; fakat bu yapılan varsayımlara aykırı oldğundan $\mathcal{S}_\Omega$ işleç uzayının kapalı olabilmesi için $\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)x - x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ işlecinin Ω_j'lerden biri olarak uzaya eklenmesi gerekir. Bu açıdan Ω_j'ler yeniden yazılırsa

$$\Omega_1 = x \qquad \Omega_2 = x^2 \qquad \Omega_3 = \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)x + x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) \qquad \Omega_4 = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{3.134}$$

taban işleçlerine varılabilir. Bu durumda $\{H_0, \Omega_3\}$ anlatımının incelenmesi gerekir. Bu anlatım

$$\begin{aligned} \{H_0, \Omega_3\} &= \left\{H_0, \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)x - x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\} \\ &= -\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)x - x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\} \\ &+ \frac{1}{2}\left\{x^2, \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)x - x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\} \end{aligned} \tag{3.135}$$

biçiminde yazılırsa iki ayrı Poisson Simgelemesi içindeki yapı tek tek incelenebilir. Bu anlatımlardan ilki,

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)x - x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\} = 4\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{3.136}$$

olarak bulunur. Diğer terim ise

$$\left\{x^2, \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)x - x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\} = 4\left(-x^2\right) \tag{3.137}$$

olarak bulunduğundan (3.135) denkleminde elde edilen sonuçlar yerine konulursa

$$\left\{H_0, \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)x - x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\} = 2\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) - 2x^2 \tag{3.138}$$

sonucuna erişilir. Elde edilen sonuca göre hem $\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$ hem de x^2 işleçleri Ω_j taban işleçleri içinde varolduğundan işleçlerin oluşturduğu uzay kapalıdır.

Bu durumda dördüncü adım olan $\{H_0, \Omega_4\}$ yani $\{H_0, -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\}$ anlatımının belirlenmesine geçilirse,

$$\{H_0, \Omega_4\} = \left\{H_0, -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\} + \frac{1}{2}\left\{x^2, -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\} \tag{3.139}$$

önce ilk terim belirlendiğinde Poisson Simgelemesinin (3.108) ile verilen özelliğinden de kolayca görüleceği gibi sonuç sıfır olarak bulunur. Bu durumda $\{H_0, -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\}$ anlatımı

$$\left\{H_0, -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\} = \frac{1}{2}\left\{x^2, -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\} \tag{3.140}$$

anlatımına eşittir. Bu anlatımın sonucu belirlendiğinde ise

$$\left\{H_0, -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\} = iI + 2ix\frac{\partial}{\partial x} \tag{3.141}$$

olarak bulunur. Bu işleç kendine eş olmadığından daha önce belirtilen nedenlerle (3.132) bağıntısı kullanılarak kendine eş duruma getirilir ve sonuca

$$\left\{H_0, -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\} = -\left(\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)x + x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right) \tag{3.142}$$

olarak ulaşılır.

Artık ikinci varsayımda belirtilen $\{\mu, \Omega_j\}$ biçimindeki işleçlerin Poisson Simgelemeleri'nin belirlenmesine geçilebilir. Sorunumuzda $\mu = x$ olduğundan ilk olarak belirlenecek olan anlatımı $\{x, \Omega_1\}$ yani $\{x, x\}$'tir. Bu anlatım cebirsel bir işleçin Poisson Simgelemesine karşılık geldiğinden sonucu sıfırdır. İkinci olarak belirlenecek olan Poisson Simgelemesi $\{x, x^2\}$ de aynı nedenden dolayı $\{x, x^2\} = 0$ olarak bulunur. Üçüncü anlatım $\{x, \Omega_3\}$ yani $\{x, \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) x + x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\}$ anlatımıdır.

$$\{\mu, \Omega_3\} = \left\{x, \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) x + x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\} = i\left[x, \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) x - x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] \tag{3.143}$$

$\{x, \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) x + x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\}$ Poisson Simgelemesi yukarıdaki biçimde yazılabileceğinden ve anlatımın komütatörü

$$\left[x, \left(\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) x + x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)\right] f = 2ixf \tag{3.144}$$

sonucunu verdiğinden $\{x, \Omega_3\}$ işleminin sonucu

$$\{x, \Omega_3\} = \left\{x, \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) x + x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\} = -2x \tag{3.145}$$

olarak elde edilir ki daha önceden de belirtildiği gibi x işlevi uzayın içinde varolduğundan uzayın son olarak verilen Ω_j işleçlerine göre kapalı olması özelliği sürmektedir. Bundan sonra yapılması gereken işlem $\{x, \Omega_4\}$ yani $\left\{x, -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\}$ Poisson Simgelemesinin belirlenmesidir. Aynı yollar izlenerek

$$\{\mu, \Omega_4\} = \left\{x, -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\} = i\left[x, -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] \tag{3.146}$$

yazılabileceğinden ve bu anlatımın komütatörü de

$$\left[x, -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] = 2\frac{\partial f}{\partial x} \tag{3.147}$$

sonucunu verdiğinden $\{x, \Omega_4\}$ işleminin sonucu

$$\{x, \Omega_4\} = \left\{x, -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\} = -2\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{3.148}$$

olarak bulunur. Bu durumda Ω_j taban işleçlerinin içerisinde $-i\frac{\partial}{\partial x}$ işleci bulunmadığından uzayın kapalı olabilmesi için Ω_j taban işleçlerine $-i\frac{\partial}{\partial x}$ işleci eklenmelidir. Buna göre Ω_j taban işleçleri aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir.

$$\Omega_1 = x \qquad \Omega_2 = -i\frac{\partial}{\partial x} \qquad \Omega_3 = x^2$$
$$\Omega_4 = \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) x + x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) \qquad \Omega_5 = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{3.149}$$

$-i\frac{\partial}{\partial x}$ işleci uzaya eklendiğinde H_0 işleci ile ilişkisine de bakılmalıdır. İşleçlerin yeniden düzenlenmiş durumu gözönünde bulundurularak $\left\{H_0, -i\frac{\partial}{\partial x}\right\}$ anlatımı belirlenirse,

$$\{H_0, \Omega_2\} = \left\{H_0, -i\frac{\partial}{\partial x}\right\} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}, -i\frac{\partial}{\partial x}\right\} + \frac{1}{2}\left\{x^2, -i\frac{\partial}{\partial x}\right\} \tag{3.150}$$

toplamının terimlerinin tek tek incelenmesi gerekir. Buna göre

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}, -i\frac{\partial}{\partial x}\right\} = i\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}, -i\frac{\partial}{\partial x}\right] \tag{3.151}$$

ise komütatör işleminin sonucu

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}, -i\frac{\partial}{\partial x}\right] f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) - \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) f = 0 \tag{3.152}$$

olduğundan $\left\{H_0, -i\frac{\partial}{\partial x}\right\}$ anlatımı $\frac{1}{2}\left\{x^2, -i\frac{\partial}{\partial x}\right\}$ anlatımına eşit olur. Bu anlatım ise,

$$\left\{H_0, -i\frac{\partial}{\partial x}\right\} = -x \tag{3.153}$$

olarak elde edilir. x işleci, Ω_j taban işleçlerinin içinde yer aldığından işleçler uzayının kapalı olması durumu geçerlidir. Bu durumda aynı biçimde $\left\{\mu, -i\frac{\partial}{\partial x}\right\}$ yani $\left\{x, -i\frac{\partial}{\partial x}\right\}$ anlatımının sonucuna bakılmalıdır.

$$\left[x, -i\frac{\partial}{\partial x}\right] f = \left(x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) - \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)x\right) f = if \tag{3.154}$$

olduğundan

$$\left\{x, -i\frac{\partial}{\partial x}\right\} = -I \tag{3.155}$$

bulunur. Uzayın kapalılığının korunması için I, yani birim işleç, uzayın içine katılmalıdır. Bu durumda Ω_j taban işleçleri aşağıda verildiği gibi değişir.

$$\begin{gathered}\Omega_1 = I \qquad \Omega_2 = x \qquad \Omega_3 = -i\frac{\partial}{\partial x} \qquad \Omega_4 = x^2 \\ \Omega_5 = \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)x + x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) \qquad \Omega_6 = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\end{gathered} \tag{3.156}$$

Burada (3.109) ile verilen Poisson simgelemesi özelliklerine göre $\{H_0, I\}$ ve $\{\mu, I\}$ işlemlerinin sonucu sıfır işleci olacağından ve sıfır işleci uzayın içinde varsayıldığından uzayın kapalılığı bozulmaz. Son düzenlemeye göre incelenmesi gereken diğer bir anlatım $\{\mu, \Omega_5\}$ yani $\left\{x, \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)x + x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\}$ anlatımıdır. Yukarıda sözü edildiği gibi bu anlatımla ilgili belirlemeler gerçekleştirildiğinde sonuç,

$$\left\{x, \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)x + x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\} = -2x \tag{3.157}$$

olarak bulunur ki, x işleci taban işleçlerinin oluşturduğu uzayın içinde varolduğundan son olarak düzenlenen Ω_j taban işleçlerinin oluşturduğu uzayın kapalı olduğu kesindir.

Son olarak, $\{\mu, \Omega_6\}$ yani $\left\{x, -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\}$ anlatımını inceleyelim. Anlatımın komütatörü

$$\left[x, -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] f = \left(x\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) - \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) x\right) f = 2\frac{\partial f}{\partial x} \tag{3.158}$$

biçiminde elde edildiğinden sonuç i ile çarpıldığında anlatımın Poisson simgelemesi

$$\left\{x, -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\} = -2\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{3.159}$$

olarak elde edilir. Dolayısı ile Ω_j taban işleçlerinin oluşturduğu uzayın bütünüyle kapalı olduğu görülmektedir. Bundan sonra sorunun çözümü için kullanılan denklemlerin çok daha kolay işlenebilen cebirsel yapıya indirgenmesine çalışılacaktır. Bunun için (3.99), (3.100) ve (3.101) ile gösterilen bağıntıları verilen varsayımlar eşliğinde yeniden yazarsak,

$$Q_1(t) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{b}_j^{(\mu)} U(t)^\dagger \Omega_j U(t) \tag{3.160}$$

$$Q_2(t) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{b}_j^{(\hat{O})} U(t)^\dagger \Omega_j U(t) \tag{3.161}$$

$$Q_3(t) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{b}_j^{(\hat{O}')} U(t)^\dagger \Omega_j U(t) \tag{3.162}$$

eşitlikleri elde edilir.

$U(t)^\dagger \Omega_j U(t)$ türünde bir yapının kolayca belirlenmesinin yollarından biri türevini almaktır. Öyleyse bu anlatımın türevi alınırsa

$$(U(t)^\dagger \Omega_j U(t))' = (U(t)^\dagger)' \Omega_j U(t) + U(t)^\dagger \Omega_j U(t)' \tag{3.163}$$

bulunur. $U(t)'$ anlatımı (3.76) ile verilen denklemden anlaşıldığı gibi

$$U(t)' = -\frac{i}{\hbar}\left[H_0 - E(t)\mu\right] U(t) \tag{3.164}$$

anlatımına $(U(t)^\dagger)'$ ise (3.79) ile verilen denklemden

$$(U(t)^\dagger)' = (U(t)^\dagger)\frac{i}{\hbar}\left[H_0 - E(t)\mu\right] \tag{3.165}$$

anlatımına eşit olduğundan

$$(U(t)^\dagger \Omega_j U(t))' = (U(t)^\dagger)\left[\frac{i}{\hbar}\left(H_0 - E(t)\mu\right)\Omega_j - \frac{i}{\hbar}\Omega_j\left(H_0 - E(t)\mu\right)\right] U(t) \tag{3.166}$$

burada köşeli parantez içindeki anlatımın Poisson Simgelemesi ile gösterildiği düşünülürse,

$$(U(t)^{\dagger}\Omega_j U(t))' = (U(t)^{\dagger})\left\{H_0, \Omega_j\right\} U(t) - E(t)U(t)^{\dagger}\left\{\mu, \Omega_j\right\} U(t) \qquad (3.167)$$

elde edilir. E yalnızca t zamanına bağlı olduğu için Poisson simgelemesinin dışarısına çıkarak yukarıdaki biçimde yazılabilir. Yapılan varsayımlardan yararlanılarak

$$(U(t)^{\dagger}\Omega_j U(t))' = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{A}_{jk}^{(H_0)} U(t)^{\dagger}\Omega_k U(t) - E(t)\sum_{k=1}^{n} \mathbf{A}_{jk}^{(\mu)} U(t)^{\dagger}\Omega_k U(t) \qquad (3.168)$$

eşitliğine ulaşılır. Burada

$$\mathbf{R}_j(t) = U(t)^{\dagger}\Omega_j U(t), \qquad j = 1, ..., n \qquad (3.169)$$

tanımlaması yapılırsa, bu tanımlama kullanılarak (3.168) denklemi yeniden yazıldığında,

$$\mathbf{R}_j'(t) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_{jk}^{(H_0)} \mathbf{R}_k(t) - E(t)\sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_{jk}^{(\mu)} \mathbf{R}_k(t) \qquad (3.170)$$

ve $\mathbf{R}_j(t)$, $\mathbf{A}_{jk}^{(H_0)}$ ile $\mathbf{A}_{jk}^{(\mu)}$'nün birer matris oldukları göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t)^T &\equiv [\mathbf{R}_1(t), ..., \mathbf{R}_n(t)], \\ \mathbf{A}_{jk}^{(H_0)} &= [\mathbf{A}_{H_0}]_{jk}, \\ \mathbf{A}_{jk}^{(\mu)} &= [\mathbf{A}_{\mu}]_{jk} \end{aligned} \qquad (3.171)$$

eşitlikleri ile (3.170) denklemi

$$\mathbf{R}(t)' = [\mathbf{A}_{H_0} - E(t)\mathbf{A}_{\mu}]\,\mathbf{R}(t) \qquad (3.172)$$

biçiminde yazılabilir. Başlangıç koşuluna bakılırsa

$$\mathbf{R}_j(t) = U(0)^{\dagger}\Omega_j U(0) = \Omega_j \qquad (3.173)$$

olarak bulunur. Ω_j

$$\mathbf{\Omega}^T = [\Omega_1, ..., \Omega_n] \qquad (3.174)$$

yapısında bir yöney ile gösterilebileceğinden başlangıç koşulu

$$\mathbf{R}(0) = \mathbf{\Omega} \qquad (3.175)$$

biçimine bürünür. Bu durumda

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_s(t)\mathbf{\Omega} \qquad (3.176)$$

içerikli bir yapı öngörülürse (3.172) denklemi

$$\mathbf{R}_s(t)' = [\mathbf{A}_{H_0} - E(t)\mathbf{A}_\mu]\,\mathbf{R}_s(t), \qquad \mathbf{R}_s(0) = \mathbf{I} \tag{3.177}$$

yapısına ulaşır. (3.160), (3.161) ve (3.162) ile verilen denklemler $\mathbf{R}_s(t)$ matrisi kullanılarak yeniden yazılırsa

$$Q_1(t) = \mathbf{b}^T_{(\mu)}\mathbf{R}_s(t)\mathbf{\Omega} \tag{3.178}$$

$$Q_2(t) = \mathbf{b}^T_{(\hat{O})}\mathbf{R}_s(t)\mathbf{\Omega} \tag{3.179}$$

$$Q_3(t) = \mathbf{b}^T_{(\hat{O}')}\mathbf{R}_s(t)\mathbf{\Omega} \tag{3.180}$$

eşitliklerine ulaşır. (3.117) ile verilen denklem ele alınarak önce $\langle in|\,Q_3(\tau)\,|in\rangle$ terimi belirlenmeye çalışıldığında

$$\langle in|\,Q_3(\tau)\,|in\rangle = \mathbf{b}^T_{\hat{O}'}\mathbf{R}_s(\tau)\langle in|\,\mathbf{\Omega}\,|in\rangle \tag{3.181}$$

yapısında bir anlatım ile karşılaşılır. Burada $\langle in|\,\mathbf{\Omega}\,|in\rangle$ yöneyi $\mathbf{q}$ ile gösterilirse,

$$\mathbf{q} = \langle in|\,\mathbf{\Omega}\,|in\rangle = \begin{bmatrix} \langle in|\,\mathbf{\Omega}_1\,|in\rangle \\ \langle in|\,\mathbf{\Omega}_2\,|in\rangle \\ \vdots \\ \langle in|\,\mathbf{\Omega}_n\,|in\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \tag{3.182}$$

(3.181) ile verilen eşitlikte $\langle in|\,Q_3(\tau)\,|in\rangle$ anlatımı (3.182) ile verilen bağıntıdaki $\mathbf{q}$ yöneyi kullanılarak

$$\langle in|\,Q_3(\tau)\,|in\rangle = \mathbf{b}^T_{\hat{O}'}\mathbf{R}_s(\tau)\mathbf{q} \tag{3.183}$$

olarak yazılır. Bundan sonra (3.117) ile verilen denklemde $\langle in|\,\{Q_2(T), Q_1(t)\}\,|in\rangle$ teriminin belirlenmesine geçilirse ilgili Poisson Simgelemesi

$$\{Q_2(T), Q_1(t)\} = \left\{\mathbf{b}^T_{\hat{O}}\mathbf{R}_s(T)\mathbf{\Omega}, \mathbf{b}^T_{\mu}\mathbf{R}_s(t)\mathbf{\Omega}\right\} \tag{3.184}$$

$\mathbf{b}$ yöneyleri ile $\mathbf{R}_s(t)$ ve $\mathbf{\Omega}$ matrisleri türünden yazılabilir. Bir adım daha ilerlenerek Poisson Simgelemesi'nin sağ tarafındaki anlatımın devriği alındığında değişmez olmasından dolayı

$$\begin{aligned} \{Q_2(T)Q_1(t)\} &= \left\{\mathbf{b}^T_{\hat{O}}\mathbf{R}_s(T)\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}^T\mathbf{R}_s(t)^T\mathbf{b}_\mu\right\} \\ &= \mathbf{b}^T_{\hat{O}}\mathbf{R}_s(T)\left\{\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}^T\right\}\mathbf{R}_s(t)^T\mathbf{b}_\mu \end{aligned} \tag{3.185}$$

yapısında yeniden yazılırsa ve $\langle in|\,\{Q_2(T), Q_1(t)\}\,|in\rangle$ anlatımın bulunması için kullanılırsa

$$\langle in|\,\{Q_2(T)Q_1(t)\}\,|in\rangle = \mathbf{b}^T_{\hat{O}}\mathbf{R}_s(T)\langle in|\left\{\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}^T\right\}|in\rangle\mathbf{R}_s(t)^T\mathbf{b}_\mu \tag{3.186}$$

elde edilir. Eğer, $\langle in| \left\{ \mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}^T \right\} |in\rangle$ anlatımı

$$\langle in| \left\{ \mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}^T \right\} |in\rangle = \mathbf{P} \qquad j,k = 1,...,n \tag{3.187}$$

ile gösterilirse

$$\mathbf{P} = \langle in| \left\{ \mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}^T \right\} |in\rangle = \begin{bmatrix} \{\Omega_1, \Omega_1\} & \cdots & \{\Omega_1, \Omega_n\} \\ \{\Omega_2, \Omega_1\} & \cdots & \{\Omega_2, \Omega_n\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\Omega_n, \Omega_1\} & \cdots & \{\Omega_n, \Omega_n\} \end{bmatrix} \tag{3.188}$$

yapısında bir matris olmak üzere $\langle in| \{Q_2(T), Q_1(t)\} |in\rangle$

$$\langle in| \{Q_2(T), Q_1(t)\} |in\rangle = \mathbf{b}_{\hat{O}}^T \mathbf{R}_s(T) \mathbf{P} \mathbf{R}_s(t)^T \mathbf{b}_\mu \tag{3.189}$$

olarak elde edilir. Son olarak (3.117) ile verilen denklemde $\langle in| \{Q_3(\tau), Q_1(t)\} |in\rangle$ terimi aynı mantıkla belirlenirse

$$\langle in| \{Q_3(\tau) Q_1(t)\} |in\rangle = \mathbf{b}_{\hat{O}'}^T \mathbf{R}_s(\tau) \mathbf{P} \mathbf{R}_s(t)^T \mathbf{b}_\mu \tag{3.190}$$

elde edilir. Yeniden elde ettiğimiz tüm bu anlatımlar (3.117) ile verilmiş olan denklemde yerlerine konulduğunda denklem

$$\begin{aligned} W_E(t)E(t) &= \eta \mathbf{b}_{\hat{O}}^T \mathbf{R}_s(T) \mathbf{P} \mathbf{R}_s(t)^T \mathbf{b}_\mu \\ &+ \int_t^T d\tau W_p(\tau) \mathbf{b}_{\hat{O}'}^T \mathbf{R}_s(\tau) \mathbf{q} \mathbf{b}_{\hat{O}'}^T \mathbf{R}_s(\tau) \mathbf{P} \mathbf{R}_s(t)^T \mathbf{b}_\mu \end{aligned} \tag{3.191}$$

biçimine bürünür. Bundan sonra buraya kadar çıkarılmış olan bağıntılardan yararlanılarak ve uygulanmak istenen dizge özellikleri de işin içine katılarak ilerlenecektir.

Buraya kadar elde edilen Poisson Simgelemeleri özetlenerek yazılır ve ilerlenirse,

$$\{H_0, \Omega_1\} = \{H_0, I\} = 0 \tag{3.192}$$

$$\{H_0, \Omega_2\} = \{H_0, x\} = -i\frac{\partial}{\partial x} = \Omega_3 \tag{3.193}$$

$$\{H_0, \Omega_3\} = \left\{ H_0, -i\frac{\partial}{\partial x} \right\} = -x = -\Omega_2 \tag{3.194}$$

$$\{H_0, \Omega_4\} = \left\{ H_0, x^2 \right\} = \left(-i\frac{\partial}{\partial x} \right) x + x \left(-i\frac{\partial}{\partial x} \right) = \Omega_5 \tag{3.195}$$

$$\begin{aligned} \{H_0, \Omega_5\} &= \left\{ H_0, \left(\left(-i\frac{\partial}{\partial x} \right) x + x \left(-i\frac{\partial}{\partial x} \right) \right) \right\} \\ &= 2 \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - 2x^2 = 2\Omega_6 - 2\Omega_4 \end{aligned} \tag{3.196}$$

$$\{H_0,\Omega_6\} = \left\{H_0, -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\} = -\left(\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)x + x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right) = -\Omega_5 \tag{3.197}$$

$$\{\mu,\Omega_1\} = \{\mu, I\} = 0 \tag{3.198}$$

$$\{\mu,\Omega_2\} = \{\mu, x\} = 0 \tag{3.199}$$

$$\{\mu,\Omega_3\} = \left\{\mu, -i\frac{\partial}{\partial x}\right\} = -I = -\Omega_1 \tag{3.200}$$

$$\{\mu,\Omega_4\} = \left\{\mu, x^2\right\} = 0 \tag{3.201}$$

$$\{\mu,\Omega_5\} = \left\{\mu, \left(\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)x + x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)\right\} = -2x = -2\Omega_2 \tag{3.202}$$

$$\{\mu,\Omega_6\} = \left\{\mu, -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\} = -2\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) = -2\Omega_3 \tag{3.203}$$

ve bu bilgiler ışığında $\mathbf{A_{H_0}}$ matrisi için $\{H_0,\Omega_j\}$'lerin her satırı taban işleçlerin doğrusal birleşimlerinden oluşacak biçimde yazılarak A_{H_0} matrisi $6x6$ kare matris olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{A}_{H_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.204}$$

$\mathbf{A}_\mu$ matrisi de aynı mantıkla elde edilmeye çalışılırsa

$$\mathbf{A}_\mu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.205}$$

yapısında elde edilir.

Yaptığımız varsayımlar gözönünde bulundurulduğunda üçüncü, dördüncü ve beşinci varsayımlardan yola çıkarak $\mathbf{b}_\mu$, $\mathbf{b}_{\hat{O}}$ ve $\mathbf{b}_{\hat{O}'}$ yöneyleri sorunumuzdaki verilere bağlı olarak

$$\mathbf{b}_\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}_{\hat{O}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}_{\hat{O}'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.206}$$

yapılarında elde edilir.

P matrisi $\mathbf{P} = \langle in \,|\, \{\Omega, \Omega^T\} \,|\, in \rangle$ olarak tanımlanmaktadır. Bu tanım gözönünde bulundurulduğunda (3.108) ve (3.111) özelliklerinden de yararlanılarak **P** matrisinin $\{\Omega_j, \Omega_j\} = 0; \quad j = 1, ..., 6$ ve $(\mathbf{P}^T = -\mathbf{P})$ özelliklerini sağlayacağı rahatça görülür ki bu durumda **P** matrisi karşıbakışık (antisimetrik) matristir ve elemanları

$$\{\Omega_1, \Omega_2\} = \{I, x\} = 0 \tag{3.207}$$

$$\{\Omega_1, \Omega_3\} = \left\{I, -i\frac{\partial}{\partial x}\right\} = 0 \tag{3.208}$$

$$\{\Omega_1, \Omega_4\} = \left\{I, x^2\right\} = 0 \tag{3.209}$$

$$\{\Omega_1, \Omega_5\} = \left\{I, \left(\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) x + x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)\right\} = 0 \tag{3.210}$$

$$\{\Omega_1, \Omega_6\} = \left\{I, -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\} = 0 \tag{3.211}$$

$$\{\Omega_2, \Omega_3\} = \left\{x, -i\frac{\partial}{\partial x}\right\} = -I = -\Omega_1 \tag{3.212}$$

$$\{\Omega_2, \Omega_4\} = \left\{x, x^2\right\} = 0 \tag{3.213}$$

$$\{\Omega_2, \Omega_5\} = \left\{x, \left(\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) x + x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)\right\} = -2\Omega_2 \tag{3.214}$$

$$\{\Omega_2, \Omega_6\} = \left\{x, -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\} = -2\Omega_3 \tag{3.215}$$

$$\{\Omega_3, \Omega_4\} = \left\{-i\frac{\partial}{\partial x}, x^2\right\} = 2x = 2\Omega_2 \tag{3.216}$$

$$\{\Omega_3, \Omega_5\} = \left\{-i\frac{\partial}{\partial x}, \left(\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) x + x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)\right\} = 2\Omega_3 \tag{3.217}$$

$$\{\Omega_3, \Omega_6\} = \left\{-i\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\} = 0 \tag{3.218}$$

$$\{\Omega_4, \Omega_5\} = \left\{x^2, \left(\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) x + x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)\right\} = -4\Omega_4 \tag{3.219}$$

$$\{\Omega_4, \Omega_6\} = \left\{x^2, -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\} = -2\Omega_5 \tag{3.220}$$

$$\{\Omega_5, \Omega_6\} = \left\{\left(\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) x + x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right), -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\} = -4\Omega_6 \tag{3.221}$$

yapısındadır ve matrisin karşıbakışık matris olduğundan da yararlanılarak oluşturulan **P** matrisi **q** yöneyi için verilen $q_j = \langle\, in \,|\Omega_j|\, in \rangle$ bağıntısı da kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&-q_1&0&-2q_2&-2q_3\\0&q_1&0&2q_2&2q_3&0\\0&0&-2q_2&0&-4q_4&-2q_5\\0&2q_2&-2q_3&4q_4&0&-4q_6\\0&2q_3&0&2q_5&4q_6&0\end{bmatrix} \tag{3.222}$$

Her bir taban vektörü için $\mathbf{q}$ yöneyinin elemanları belirlenirse

$$q_1=\langle\ in\,|I|\ \ in\rangle=\pi^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}dx\mathrm{e}^{-x^2}=1 \tag{3.223}$$

$$q_2=\langle\ in\,|x|\ \ in\rangle=\pi^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}dx\mathrm{e}^{-x^2}x=0 \tag{3.224}$$

$$q_3=\left\langle\ in\left|-i\frac{\partial}{\partial x}\right|\ in\right\rangle=\pi^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}dx\mathrm{e}^{-x^2/2}-i\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{e}^{-x^2/2}=0 \tag{3.225}$$

$$q_4=\langle\ in\,|x^2|\ \ in\rangle=\pi^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}dx\mathrm{e}^{-x^2}x^2=\frac{1}{2} \tag{3.226}$$

$$\begin{aligned}q_5 &= \left\langle in\left|\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)x+x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right|\ in\right\rangle\\ &= \pi^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}dx\mathrm{e}^{-x^2/2}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)x+x\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathrm{e}^{-x^2/2}=0\end{aligned} \tag{3.227}$$

$$q_6=\left\langle\ in\left|-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right|\ in\right\rangle=\pi^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}dx\mathrm{e}^{-x^2/2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{e}^{-x^2/2}=\frac{1}{2} \tag{3.228}$$

sonuçlar bu yapıda elde edilmiş olur. O halde $\mathbf{q}$ yöneyi

$$\mathbf{q}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix} \tag{3.229}$$

yapısındadır. Bulunan q_j sonuçları $\mathbf{P}$ matrisinde yerine konularak yeniden yazılırsa,

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&-2&0\\0&0&0&2&0&-2\\0&0&0&0&2&0\end{bmatrix} \tag{3.230}$$

yapısında olduğu görülür. Böylece

$$\mathbf{R_s}(t)' = [\mathbf{A}_{H_0} - E(t)\mathbf{A}_\mu]\,\mathbf{R_s}(t), \qquad \mathbf{R_s}(0) = I \tag{3.231}$$

biçimindeki Devinim Denklemi'nin çözülmesine geçebiliriz. Bunun için evrim işlecinin çarpanlarından yararlanabiliriz. İlk önce

$$\mathbf{R_s}(t) = \mathrm{e}^{t\mathbf{A}_{H_0}}\mathbf{R_s}^{(1)}(t) \tag{3.232}$$

olarak alalım ve $\mathbf{R_s}^{(1)}(t)$'nin ne olduğunu bulmaya çalışalım. (3.232) denkleminin türevi alınırsa ve (3.231) denkleminden yararlanılırsa,

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}_{H_0}}\left(\mathbf{A}_{H_0}\mathbf{R_s}^{(1)}(t) + \mathbf{R_s}^{(1)}(t)'\right) = \left(\mathbf{A}_{H_0}\mathrm{e}^{t\mathbf{A}_{H_0}} - E(t)\mathbf{A}_\mu\mathrm{e}^{t\mathbf{A}_{H_0}}\right)\mathbf{R_s}^{(1)}(t) \tag{3.233}$$

denklemi elde edilir. Denklemdeki her iki taraftaki ilk terimler birbirine eşit olduğundan birbirini götürür ve denklem

$$\mathbf{R_s}^{(1)}(t)' = -E(t)\left(\mathrm{e}^{-t\mathbf{A}_{H_0}}\mathbf{A}_\mu\mathrm{e}^{t\mathbf{A}_{H_0}}\right)\mathbf{R_s}^{(1)}(t) \tag{3.234}$$

yapısında yazılabilir. $\mathrm{e}^{-t\mathbf{A}_{H_0}}\mathbf{A}_\mu\mathrm{e}^{t\mathbf{A}_{H_0}}$ anlatımına $\mathbf{M}(t)$ denilir ve bu anlatımın eşiti bulunmaya çalışılırsa yine türev alınarak ilerlenebilir.

$$\begin{aligned}\mathbf{M}'(t) &= \mathrm{e}^{-t\mathbf{A}_{H_0}}\left(-\mathbf{A}_{H_0}\mathbf{A}_\mu + \mathbf{A}_\mu\mathbf{A}_{H_0}\right)\mathrm{e}^{t\mathbf{A}_{H_0}} \\ &= \mathrm{e}^{-t\mathbf{A}_{H_0}}\left[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_{H_0}\right]\mathrm{e}^{t\mathbf{A}_{H_0}}\end{aligned} \tag{3.235}$$

$[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_{H_0}]$ ile gösterilen komütatör belirlenirse,

$$[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_{H_0}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.236}$$

matrisi elde edilir. Bu matris bu yapısıyla henüz bir türevli denklem elde edilmesi için bir katkı sağlamayacağından $\mathbf{M}(t)$'nin ikinci türevi sorgulanabilir.

$$\mathbf{M}''(t) = \mathrm{e}^{-t\mathbf{A}_{H_0}}\left[\left[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_{H_0}\right], \mathbf{A}_{H_0}\right]\mathrm{e}^{t\mathbf{A}_{H_0}} \tag{3.237}$$

$[[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_{H_0}], \mathbf{A}_{H_0}]$ anlatımı ile verilen komütatör belirlendiğinde

$$[[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_{H_0}], \mathbf{A}_{H_0}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.238}$$

matrisi elde edilir ki bu matris $-\mathbf{A}_\mu$ matrisine eşit olduğundan türevli denklem

$$M''(t) = -M(t) \tag{3.239}$$

olarak bulunur ve bu türevli denklemin

$$M(t) = \mathbf{C}_1 \sin(t) + \mathbf{C}_2 \cos(t) \tag{3.240}$$

şeklinde bir çözümü vardır. Türevli denklemin başlangıç koşulları

$$M(0) = \mathbf{A}_\mu, \qquad M'(0) = [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_{H_0}] \tag{3.241}$$

olduğundan bu koşullar altında $\mathbf{C}_1$ ve $\mathbf{C}_2$ matrisleri

$$\mathbf{M}(0) = \mathbf{C}_2 = \mathbf{A}_\mu, \qquad M'(0) = \mathbf{C}_1 = [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_{H_0}] \tag{3.242}$$

olarak bulunur. Buna göre $\mathbf{M}(t)$

$$\mathbf{M}(t) = [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_{H_0}] \sin(t) + \mathbf{A}_\mu \cos(t) \tag{3.243}$$

yapısındadır. $\mathbf{M}(t)$, (3.234) denkleminde yerine konulursa,

$$\mathbf{R_s}^{(1)}(t)' = \left(-E(t)\sin(t)\,[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_{H_0}] - E(t)\cos(t)\mathbf{A}_\mu\right)\mathbf{R_s}^{(1)}(t), \qquad \mathbf{R_s}^{(1)}(0) = I \tag{3.244}$$

$\mathbf{R_s}^{(1)}(t)$ matrisi buradan bir çırpıda çözülemeyeceği için yeniden evrim işleci çarpanlarından yararlanılırsa,

$$\mathbf{R_s}^{(1)}(t) = \mathrm{e}^{-\int_0^t d\tau \cos(\tau) E(\tau) \mathbf{A}_\mu} \mathbf{R_s}^{(2)}(t), \qquad \mathbf{R_s}^{(2)}(0) = I \tag{3.245}$$

denklemi yazılır. Buradan yeniden türev alınarak ilerlenirse,

$$\mathbf{R_s}^{(2)}(t)' = \left(-E(t)\sin(t)\mathrm{e}^{u(t)\mathbf{A}_\mu}\,[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_{H_0}]\,\mathrm{e}^{-u(t)\mathbf{A}_\mu}\right)\mathbf{R_s}^{(2)}(t), \qquad \mathbf{R_s}^{(2)}(0) = I \tag{3.246}$$

elde edilir. Bu denklemde kullanılan $u(t)$ işlevi

$$u(t) = \int_0^t d\tau \cos(\tau) E(\tau) \tag{3.247}$$

yapısındadır.

$\mathrm{e}^{u(t)\mathbf{A}_\mu}\,[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_{H_0}]\,\mathrm{e}^{-u(t)\mathbf{A}_\mu}$ anlatımına $\mathbf{M}_1(u)$ denirse,

$$M_1'(u) = \mathrm{e}^{u(t)\mathbf{A}_\mu}\,[\mathbf{A}_\mu, [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_{H_0}]]\,\mathrm{e}^{-u(t)\mathbf{A}_\mu} \tag{3.248}$$

yazılabilir. Burada, $[\mathbf{A}_\mu, [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_{H_0}]]$ anlatımının belirlenmesi gerekmektedir. Bu anlatım belirlendiğinde

$$[\mathbf{A}_\mu, [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_{H_0}]] = \mathbf{0} \tag{3.249}$$

elde edilir. Buna göre

$$\mathbf{M}_1'(t) = 0, \qquad \mathbf{M}_1(t) = \text{değişmez} \tag{3.250}$$

olarak bulunur. $\mathbf{M}_1(0) = [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_{H_0}]$ başlangıç koşulu göz önünde bulundurulduğunda

$$\mathbf{M}_1(t) = [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_{H_0}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.251}$$

sonucu elde edilir. (3.246) denkleminde $\mathbf{M}_1(t)$ yerine konulursa bu denklem

$$\mathbf{R_s}^{(2)}(t)' = \left(-E(t)\sin(t)\,[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_{H_0}]\right)\mathbf{R_s}^{(2)}(t), \qquad \mathbf{R_s}^{(2)}(0) = I \tag{3.252}$$

biçimine bürünür. Bu denklem çözümü bakımından oldukça kolay bir türevli denklem olduğundan çözümü bir çırpıda

$$\mathbf{R_s}^{(2)}(t) = \mathrm{e}^{-\int_0^t d\tau \sin(\tau)E(\tau)\left[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_{H_0}\right]} \tag{3.253}$$

olarak yazılabilir. Böylece,

$$v(t) = \int_0^t d\tau \sin(\tau)E(\tau) \tag{3.254}$$

olmak üzere (3.232) ile verilen denklemin eşdeğeri aşağıdaki gibi olur.

$$\mathbf{R_s}(t) = \mathrm{e}^{t\mathbf{A}_{H_0}}\mathrm{e}^{-u(t)\mathbf{A}_\mu}\mathrm{e}^{-v(t)\left[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_{H_0}\right]} \tag{3.255}$$

Bundan sonra $\mathbf{R_s}(t)$ matrisinin bulunabilmesi için yukarıdaki üstel matrislerin belirlenmesi gerekmektedir. Öncelikle $\mathrm{e}^{t\mathbf{A}_{H_0}}$ matrisi bulunmak istenirse (3.204) ile verilen $\mathbf{A}_{H_0}$ matrisinden yararlanılarak

$$\mathrm{e}^{t\mathbf{A}_{H_0}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & \sin(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(t) & \cos(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} & \frac{\sin(2t)}{2} & -\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(2t) & \cos(2t) & \sin(2t) \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} & -\frac{\sin(2t)}{2} & \frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{3.256}$$

sonucuna ulaşılır. Buradaki belirlemeler MuPAD simgesel programlama dili ile gerçekleştirilmiştir.

Bundan sonra $\mathrm{e}^{-u(t)\mathbf{A}_\mu}$ anlatımının belirlenmesine geçilirse, (3.205) ile sırasayılandırılmış $\mathbf{A}_\mu$ matrisi gözönüne alınarak

$$\mathbf{A}_\mu^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.257}$$

ve

$$\mathbf{A}_\mu^3 = \mathbf{0} \tag{3.258}$$

biçiminde bulunduğundan

$$\mathbf{A}_\mu^m = \mathbf{0}, \qquad\qquad m \geq 3 \tag{3.259}$$

yazılabilir. Bu durumda $\mathrm{e}^{-u(t)\mathbf{A}_\mu}$ üstel matrisi seriye açıldığında

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-u(t)\mathbf{A}_\mu} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-u(t))^{3m}}{3m!}\mathbf{A}_\mu^{3m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-u(t))^{3m+1}}{(3m+1)!}\mathbf{A}_\mu^{3m+1} \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-u(t))^{3m+2}}{(3m+2)!}\mathbf{A}_\mu^{3m+2} \end{aligned} \tag{3.260}$$

$\mathbf{A}_\mu$ matrisinin üçüncü kuvveti ve sonraki tüm kuvvetleri sıfır matris ürettiğinden $\mathrm{e}^{-u(t)\mathbf{A}_\mu}$ üstel matrisi

$$\mathrm{e}^{-u(t)\mathbf{A}_\mu} = I - u(t)\mathbf{A}_\mu + \frac{1}{2}u^2(t)\mathbf{A}_\mu^2 \tag{3.261}$$

eşitliği ile ve sonuçta

$$\mathrm{e}^{-u(t)\mathbf{A}_\mu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2u & 0 & 0 & 1 & 0 \\ u^2 & 0 & 2u & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.262}$$

yapısı ile verilir.

Bundan sonra $\mathrm{e}^{-v(t)[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_{H_0}]}$ üstel matrisinin belirlenmesine geçilebilir. (3.236) ile verilen $[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_{H_0}]$ matrisinin karesi

$$[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_{H_0}]^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.263}$$

yapısındadır. Yukarıda izlenen yol izlenerek, seriye açılabilmesi için kübüne bakıldığında $[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_{H_0}]^3 = \mathbf{0}$ bulunduğundan

$$e^{-v(t)\left[\mathbf{A}_\mu,\mathbf{A}_{H_0}\right]} = I - v(t)\left[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_{H_0}\right] + \frac{1}{2}v(t)^2\left[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_{H_0}\right]^2 \tag{3.264}$$

denklemi betimlenebilir ve (3.254) ile verilen eşitlikte belirtildiği gibi $v(t)$ işlevinin $\int_0^t d\tau \sin(\tau)E(\tau)$ tümlevine eşit olduğu gözönüne alınarak

$$e^{-v(t)\left[\mathbf{A}_\mu,\mathbf{A}_{H_0}\right]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v^2 & -2v & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2v & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.265}$$

olarak matris biçiminde yazılır.

(3.255) denkleminde çarpım halinde bulunan tüm üstel matrisler elde edilmiş olduğundan bu üstel matrisler çarpılarak genel yapısı

$$\mathbf{R_s}(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \tag{3.266}$$

şeklinde olan $\mathbf{R_s}(t)$ matrisinin elemanları

$$\begin{aligned}
&a_{11} = 1, \quad a_{12} = 0, \quad a_{13} = 0, \quad a_{14} = 0, \quad a_{15} = 0, \quad a_{16} = 0, \\
&a_{21} = -v\cos(t) + u\sin(t), \quad a_{22} = \cos(t), \quad a_{23} = \sin(t), \\
&a_{24} = 0, \quad a_{25} = 0, \quad a_{26} = 0, \\
&a_{31} = u\cos(t) + v\sin(t), \quad a_{32} = -\sin(t), \quad a_{33} = \cos(t), \\
&a_{34} = 0, \quad a_{35} = 0, \quad a_{36} = 0, \\
&a_{41} = -uv\sin(2t) + \frac{u^2}{2}\left(-\cos(2t) + 1\right) + \frac{v^2}{2}\left(\cos(2t) + 1\right)\right), \\
&a_{42} = u\sin(2t) - v\left(\cos(2t) + 1\right), \\
&a_{43} = -v\sin(2t) + u\left(-\cos(2t) + 1\right), \\
&a_{44} = \frac{1}{2}\left(\cos(2t) + 1\right), \quad a_{45} = \frac{1}{2}\sin(2t), \quad a_{46} = -\frac{1}{2}\left(\cos(2t) + 1\right) \\
&a_{51} = -2uv\cos(2t) + u^2\sin(2t) - v^2\sin(2t), \quad a_{52} = 2u\cos(2t) + 2v\sin(2t), \\
&a_{53} = -2v\cos(2t) + 2u\sin(2t), \quad a_{54} = -sin(2t), \\
&a_{55} = cos(2t), \quad a_{56} = sin(2t),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_{61} &= uv\sin(2t) + \frac{u^2}{2}\left(\cos(2t)+1\right) + \frac{v^2}{2}\left(-\cos(2t)+1\right),\\
a_{62} &= -u\sin(2t) - v\left(-\cos(2t)+1\right),\\
a_{63} &= v\sin(2t) + u\left(\cos(2t)+1\right),\\
a_{64} &= -\frac{1}{2}\left(\cos(2t)+1\right), \quad a_{65} = -\frac{1}{2}\sin(2t), \quad a_{66} = \frac{1}{2}\left(\cos(2t)+1\right)
\end{aligned}
\tag{3.267}
$$

eşitlikleriyle verilen biçimde bulunur.

Böylece (3.191) ile verilmiş olan denetim denkleminde yer alan tüm matrislerin bulunma işlemi tamamlanmış olmaktadır. Bundan sonra yapılması gereken işlem, matrislerin denetim denkleminde yerine konularak tümlev denklemi elde etmektir. Matrislerin çarpılması işlemi Ek A'da verilmiş olan program ile gerçekleştirilmiş ve sonuç,

$$
\begin{aligned}
& W_E(t)E(t) = \\
& = \eta\int_0^T d\tau\left[u(T)\cos(t) + v(T)\sin(t) - u(T)\cos(2T-t) - v(T)\sin(2T-t)\right]\\
& + \frac{1}{2}\int_t^T d\tau W_p(\tau)\left[u(\tau)\cos(t) + v(\tau)\sin(t) + u(\tau)\cos(t-2\tau) - v(\tau)\sin(t-2\tau)\right]\\
& + \int_t^T d\tau W_p(\tau)\left[\frac{1}{2}u(\tau)^3\cos(t) + \frac{1}{2}u(\tau)v(\tau)^2\cos(t) + u(\tau)^2 v(\tau)\sin(2\tau)\cos(t)\right.\\
& + \frac{1}{2}u(\tau)^3\cos(2\tau)\cos(t) - \frac{1}{2}u(\tau)v(\tau)^2\cos(2\tau)\cos(t) + \frac{1}{2}u(\tau)^2 v(\tau)\sin(t)\\
& + \frac{1}{2}v(\tau)^3\sin(t) + u(\tau)v(\tau)^2\sin(2\tau)\sin(t) + \frac{1}{2}u(\tau)^2 v(\tau)\cos(2\tau)\sin(t)\\
& - \frac{1}{2}v(\tau)^3\cos(2\tau)\sin(t) + \frac{1}{2}u(\tau)^3\cos(t-2\tau) + \frac{1}{2}u(\tau)v(\tau)^2\cos(t-2\tau)\\
& + u(\tau)^2 v(\tau)\sin(2\tau)\cos(t-2\tau) + \frac{1}{2}u(\tau)^3\cos(2\tau)\cos(t-2\tau)\\
& - \frac{1}{2}u(\tau)v(\tau)^2\cos(2\tau)\cos(t-2\tau) - \frac{1}{2}u(\tau)^2 v(\tau)\sin(t-2\tau)\\
& - \frac{1}{2}v(\tau)^3\sin(t-2\tau) - u(\tau)v(\tau)^2\sin(2\tau)\sin(t-2\tau)\\
& \left. - \frac{1}{2}u(\tau)^2 v(\tau)\cos(2\tau)\sin(t-2\tau) + \frac{1}{2}v(\tau)^3\cos(2\tau)\sin(t-2\tau)\right]
\end{aligned}
\tag{3.268}
$$

yapısında, dış alan genlik işlevinin doğrusal ve küplü terimler içeren biçimde elde edilir. Bu anlatımda bulunan $u(t)$ ve $v(t)$ işlevleri (3.247) ve (3.254) denklemlerinde verildiği biçimleriyle düşünülerek yalnızca doğrusal terimler aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$
\begin{aligned}
&E(t) = \\
&= \eta \int_0^T d\tau E(t) \left[\cos(t-\tau) - \cos(2T-t-\tau)\right] \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t d\tau E(t)(T-t)\cos(t-\tau) + \frac{1}{2}\int_t^T d\tau W_p(\tau)E(t)(T-\tau)\cos(t-\tau) \\
&+ \frac{1}{4}\int_0^T d\tau E(t)\sin(2T-t-\tau) - \frac{1}{4}\int_0^t d\tau E(t)\sin(t-\tau) \\
&+ \frac{1}{4}\int_t^T d\tau W_p(\tau)E(t)\sin(t-\tau)
\end{aligned} \tag{3.269}
$$

Burada elde edilen anlatımın doğrusal kesimi, saptırım açılımları yöntemi kullanılarak yapılan birinci basamaktan yaklaştırım ile elde edilen sonuç ile aynıdır. Aralarındaki tek fark işaret farkıdır ki bu da her iki yöntemde Schrödinger denkleminde bulunan $E(t)$'nin ters işaretli olarak alınmasından kaynaklanmaktadır. $E(t)$'nin ters işaretli alınması sorunun matematiksel çözümlerini etkilemez yalnızca bir gösterilim farklılığıdır.

Evrim işleçleri ile indirgeme yönteminde elde edilen sonuçta doğrusal terimlerin yanısıra $E(t)$'nin küplü anlatımları da elde edilmiştir. Saptırım açılımları ile dizgenin eniyilemeli denetim çözümüne ulaşılmaya çalışıldığında yalnızca birinci basamaktan açılım yapıldığı için doğrusal olmayan terimler sonuçta görünmemektedir.

BÖLÜM 4

DOĞRUSALLAŞTIRMA YAKLAŞTIRIMINDA ELDE EDİLEN DENKLEMLERİN ELDE EDİLMESİ

Çalışmada yer alan her iki yöntemle de elde edilmiş olan tümlev denklemin doğrusal kesiminin her iki yanına $W_{\mathcal{E}}(t) = 1$ olmak üzere

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + I\right)^2 \tag{4.1}$$

işleci uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + I\right)^2 \mathcal{E}(t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + I\right)^2 \times \\
&\left[\eta \int_0^T d\tau \mathcal{E}(\tau) \left(-\cos(t-\tau) + \cos(2T - t - \tau)\right)\right. \\
&+ \int_0^t d\tau \mathcal{E}(\tau) \left(-\frac{1}{2}(T-t)\cos(t-\tau) - \frac{1}{4}\sin(2T-t-\tau) + \frac{1}{4}\sin(t-\tau)\right) \\
&\left.+ \int_t^T d\tau \mathcal{E}(\tau) \left(-\frac{1}{2}(T-\tau)\cos(t-\tau) - \frac{1}{4}\sin(2T-t-\tau) - \frac{1}{4}\sin(t-\tau)\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.2}$$

şeklinde eşitliğin değeri değişmez ve böylece tümlev denklem bir diferansiyel denkleme dönüştürülerek dış alan genliği $\mathcal{E}(t)$'nin yapısının ne olduğu hakkında bir fikir edinilmiş olur. Bu bağlamda denklemin her iki tarafına bahsedilen işlev uygulandığında denklem

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^4 \mathcal{E}(t)}{\partial t^4} + 2\frac{\partial^2 \mathcal{E}(t)}{\partial t^2} + \mathcal{E}(t) = \\
&\mathcal{E}'''(t)\left[-\frac{1}{2}(T-t) - \frac{1}{4}\sin(2T-2t)\right] + \mathcal{E}''(t)\left[\frac{9}{4} + \frac{7}{4}\cos(2T-2t)\right] \\
&+\mathcal{E}'(t)\left[-\frac{1}{2}(T-t) + \frac{15}{4}\sin(2T-2t)\right] + \mathcal{E}(t)\left[\frac{1}{4} - \frac{9}{4}\cos(2T-2t)\right] \\
&-\mathcal{E}'''(t)\left[-\frac{1}{2}(T-t) - \frac{1}{4}\sin(2T-2t)\right] - \mathcal{E}''(t)\left[\frac{5}{4} + \frac{7}{4}\cos(2T-2t)\right] \\
&-\mathcal{E}'(t)\left[-\frac{1}{2}(T-t) + \frac{15}{4}\sin(2T-2t)\right] - \mathcal{E}(t)\left[\frac{1}{4} - \frac{9}{4}\cos(2T-2t)\right]
\end{aligned} \tag{4.3}$$

yapısına bürünür. Burada gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$\frac{\partial^4 \mathcal{E}(t)}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}(t)}{\partial t^2} + \mathcal{E}(t) = 0 \tag{4.4}$$

4. basamaktan diferansiyel denklem yapısı elde edilmiş olur ki bu da bahsedildiği gibi dış alan genliği $\mathcal{E}(t)$'nin yapısının

$$\mathcal{E}(t) = A_1 \mathrm{e}^{B_1 t} + A_2 \mathrm{e}^{B_2 t} + A_3 \mathrm{e}^{B_3 t} + A_4 \mathrm{e}^{B_4 t} \tag{4.5}$$

şeklinde olduğu anlamına gelmektedir. Bu yapı gözönünde bulundurularak tümlev denklemin her iki yanındaki $\mathcal{E}(t)$ anlatımının yerine yerleştirilirse denklem

$$\begin{aligned}
&A_1 \mathrm{e}^{B_1 t} + A_2 \mathrm{e}^{B_2 t} + A_3 \mathrm{e}^{B_3 t} + A_4 \mathrm{e}^{B_4 t} = \\
&= \eta \int_0^T d\tau \left(A_1 \mathrm{e}^{B_1 \tau} + A_2 \mathrm{e}^{B_2 \tau} + A_3 \mathrm{e}^{B_3 \tau} + A_4 \mathrm{e}^{B_4 \tau}\right) \times \\
&(-\cos(t-\tau) + \cos(2T - t - \tau)) \\
&+ \int_0^t d\tau \left(A_1 \mathrm{e}^{B_1 \tau} + A_2 \mathrm{e}^{B_2 \tau} + A_3 \mathrm{e}^{B_3 \tau} + A_4 \mathrm{e}^{B_4 \tau}\right) \times \\
&\left(-\frac{1}{2}(T-t)\cos(t-\tau) - \frac{1}{4}\sin(2T-t-\tau) + \frac{1}{4}\sin(t-\tau)\right) \\
&+ \int_t^T d\tau \left(A_1 \mathrm{e}^{B_1 \tau} + A_2 \mathrm{e}^{B_2 \tau} + A_3 \mathrm{e}^{B_3 \tau} + A_4 \mathrm{e}^{B_4 \tau}\right) \times \\
&\left(-\frac{1}{2}(T-\tau)\cos(t-\tau) - \frac{1}{4}\sin(2T-t-\tau) - \frac{1}{4}\sin(t-\tau)\right)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

şekline dönüşür. Yukarıdaki anlatım işlemlerin kolaylığı açısından toplam sembolleri kullanılarak yeniden yazılır

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{4} A_j \mathrm{e}^{B_j t} = \eta \int_0^T d\tau \left[(-\cos(t-\tau) + \cos(2T-t-\tau)) \sum_{j=1}^{4} A_j \mathrm{e}^{B_j \tau}\right] \\
&+ \int_0^t d\tau \left[\left(-\frac{1}{2}(T-t)\cos(t-\tau) - \frac{1}{4}\sin(2T-t-\tau) + \frac{1}{4}\sin(t-\tau)\right) \times \right. \\
&\left.\sum_{j=1}^{4} A_j \mathrm{e}^{B_j \tau}\right] + \int_t^T d\tau \left[\left(-\frac{1}{2}(T-\tau)\cos(t-\tau) - \frac{1}{4}\sin(2T-t-\tau)\right.\right. \\
&\left.\left.-\frac{1}{4}\sin(t-\tau)\right) \sum_{j=1}^{4} A_j \mathrm{e}^{B_j \tau}\right]
\end{aligned} \tag{4.7}$$

ve tümlevleri alınırsa

$$\sum_{j=1}^{4} A_j \mathrm{e}^{B_j t} = \sum_{j=1}^{4} \left(\frac{A_j}{4(B_j^2+1)^2} \right) \Big\{ \big[4\eta B_j(B_j^2+1) - 8\eta(B_j^2+1)\mathrm{e}^{B_j T}\sin(T)$$
$$+4\eta(B_j^2+1)\sin(2T) - 4\eta B_j(B_j^2+1)\cos(2T) + 2B_j(B_j^2+1)T$$
$$+(B_j^2+1)\cos(2T) + B_j(B_j^2+1)\sin(2T) - (B_j^2+1) - 4B_j^2\mathrm{e}^{B_j T}\cos(T)$$
$$-4B_j\mathrm{e}^{B_j T}\sin(T) \big] \cos(t) + \big[-4\eta(B_j^2+1) + 8\eta(B_j^2+1)\mathrm{e}^{B_j T}\cos(T)$$
$$-4\eta(B_j^2+1)\cos(2T) - 4\eta B_j(B_j^2+1)\sin(2T) - 2(B_j^2+1)T$$
$$+(B_j^2+1)\sin(2T) - B_j(B_j^2+1)\cos(2T) - B_j(B_j^2+1) - 4B_j^2\mathrm{e}^{B_j T}\sin(T)$$
$$+4B_j\mathrm{e}^{B_j T}\cos(T) \big] \sin(t) + \big[2(B_j^2+1) \big] t\sin(t) + \big[-2B_j(B_j^2+1) \big] t\cos(t)$$
$$+4B_j^2\mathrm{e}^{B_j T} \Big\} \tag{4.8}$$

anlatımın son hali yukarıdaki gibi yazılır. Bu anlatımda eşitliğin sol tarafında $\cos(t)$, $\sin(t)$, $t\cos(t)$ ve $t\sin(t)$ işlevlerine bağlı herhangi bir yapı olmadığından bu işlevlerin çarpanlarının katsayıları sıfıra eşitlenerek sınır koşulları elde edilir. Gereken yalınlaştırmalar yapıldığında sözü edilen sınır koşullarının

$$\sum_{j=1}^{4} \left(\frac{A_j}{(B_j^2+1)^2} \right) \big(2\eta(B_j^2+1)\mathrm{e}^{B_j T}\sin(T) + B_j^2\mathrm{e}^{B_j T}\cos(T) + B_j\mathrm{e}^{B_j T}\sin(T) \big) = 0 \tag{4.9}$$

$$\sum_{j=1}^{4} \left(\frac{A_j}{(B_j^2+1)^2} \right) \big(2\eta(B_j^2+1)\mathrm{e}^{B_j T}\cos(T) - B_j^2\mathrm{e}^{B_j T}\sin(T) + B_j\mathrm{e}^{B_j T}\cos(T) \big) = 0 \tag{4.10}$$

$$\sum_{j=1}^{4} \frac{A_j}{2(B_j^2+1)} = 0 \tag{4.11}$$

$$\sum_{j=1}^{4} \frac{A_j B_j}{2(B_j^2+1)} = 0 \tag{4.12}$$

$$\sum_{j=1}^{4} \left(\frac{A_j}{(B_j^2+1)^2} \right) B_j^2\mathrm{e}^{B_j T} = 0 \tag{4.13}$$

şeklinde olduğu görülür. Böylece 4 bilinmeyen için 5 denklem elde edilmiş olur. Ancak, bu denklem sayısı fazlalığı çözümsüzlüğe yol açmaz. Çünkü, eğer burada (4.9) ve (4.10) eşitliklerinin her iki yanı, sırasıyla, $\cos(T)$ ve $\sin(T)$ ile çarpılıp ikincisi ilkinden çıkarılırsa

$$\sum_{j=1}^{4} \left(\frac{A_j}{(B_j^2+1)^2} \right) B_j^2\mathrm{e}^{B_j T} = 0 \tag{4.14}$$

elde edilir. Bu ise (4.13) ile eşdeğerdir. Dolayısıyla (4.9)–(4.12) eşitikleri A_j katsayılarının belirlenmesi için doğrusal denklemler verirler.

BÖLÜM 5

GENEL DURUMDA ETKİLEŞİM ZAMANINA GÖRE AÇILIM İLE YAKLAŞIK ÇÖZÜM

Doğrusal olmayan terimlerin de içerildiği genel, saptırımsız, yapıda elde edilen denklemi yeniden gözönüne alabiliriz. Bu denklemdeki büyüklüklerde açıkça gösterilmemesine karşın tüm bilinmiyenlerde T yani etkileşme süresine olan bağımlılıktan söz etmek gerekir. Bu amaçla önce, $W_E(t,T)$ ile göstereceğimiz ağırlığın, T sıfıra giderken nasıl bir davranış göstereceğini, saptamak gerekir. Bu ise $E(t,T)$'nin aynı durumdaki davranışının belirlenmesini gündeme getirir. Schrödinger denkleminde t $[\,0,T\,]$ aralığında değişir. Yani aralıkta T bağımlılığı bulunmaktadır. Bu bağımlılıktan kurtulmak için t değişkeni yerine Tt kullanarak t'nin tanım bölgesini $[\,0,1\,]$ aralığına taşımak mümkündür. Bu ölçekleme, T, 0 dolaylarındayken Schrödinger denkleminde baskın işlecin $TE(t,T)$'yi orantı çarpanı olarak alan μ işleci olmasına yol açar. Ancak bunun için $TE(t,T)$ işlevinin $T \to 0$ için değerinin sıfırlanmaması gerekir. Bu ise

$$E(t,T) = \sum_{k=0}^{\infty} T^{k-1} E_k(t) \tag{5.1}$$

yazılabileceği anlamına gelir. Buradan asimptotik bir anlatım olarak

$$\left(E(t,T)\right)_{T\to 0} \approx \frac{E_0(t)}{T} \tag{5.2}$$

eşitliğine geçilebilir. Burada $E_0(t)$ henüz belirlenmemiş bir işlev durumundadır. $E(t,T)$'nin bu biçimde, $T = 0$'da görünen basit kutup tekilliği onunla ilgili yaptırım teriminin bu limitte sonsuza gitmesini dolayısı ile amaç işlevsisinde bu yaptırım teriminin baskın duruma gelmesini gerektirir. Bu sonsuza gidiş ya da baskınlığın istenilmeyen bir durum olması nedeniyle $W_E(t,T)$ için aşağıdaki öngörüm yapılmalıdır.

$$\left(W_E(t,T)\right)_{T\to 0} \approx T W_0^{(E)}(t) \tag{5.3}$$

Aynı tür bir inceleme $W_p(t,T)$ için

$$\left(W_p(t,T)\right)_{T\to 0} \approx \frac{W_0^{(p)}(t)}{T} \tag{5.4}$$

öngörümünün yapılmasına olanak sağlar. Son iki eşitlikte 0 indisli iki ağırlık bileşeni işlevi aslında ilgili büyüklüklerin serisel açılımlarındaki ilk terimlere karşılık gelmektedir. Bu yeni ölçeklemeli gösterilimde, $u(t,T)$ ve $v(t,T)$ büyüklüklerinin, T sıfıra giderkenki davranışı aşağıdaki eşitliklerle verilebilir.

$$(u(t,T))_{T\to 0} \equiv u_0(t) \approx \int_0^t d\tau E_0(\tau) \tag{5.5}$$

$$(v(t,T))_{T\to 0} \equiv v_0(t) \approx 0 \tag{5.6}$$

Eğer $\eta(T)$'nin $T=0$'da sonlu kaldığı gözönüne alınırsa

$$W_0^{(E)}(t)E_0(t) = \int_t^1 d\tau W_0^{(p)}(\tau)u_0(\tau) + 2\int_t^1 d\tau W_0^{(p)}(\tau)u_0(\tau)^3 \tag{5.7}$$

elde edilir. Eğer bu eşitliğin her iki yanının t'ye göre türevi alınırsa

$$\frac{d\left(W_0^{(E)}(t)E_0(t)\right)}{dt} = -W_0^{(p)}(t)u_0(t) - 2W_0^{(p)}(t)u_0(t)^3 \tag{5.8}$$

ve $E_0(t)$ yerine $u_0(t)$ türünden eşdeğeri kullanılacak olursa

$$\frac{d}{dt}\left(W_0^{(E)}(t)\frac{du_0(t)}{dt}\right) = -W_0^{(p)}(t)u_0(t) - 2W_0^{(p)}(t)u_0(t)^3 \tag{5.9}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlik her ne kadar sıradan bir türevli denklem gösterse de doğrusal olmama nedeniyle çözümünün analitik olarak bulunması o kadar kolay değildir. Zorluğa ağırlık işlevlerinin varlığı da olumsuz katkıda bulunur. Bu nedenle olaya en kolay durumundan yaklaşarak yapıyı iyice anlayabilmek için

$$W_0^{(E)}(t) \equiv 1, \qquad W_0^{(p)}(t) \equiv 1 \tag{5.10}$$

ilerisürümünü yapabiliriz. Bu durumda (6.9) eşitliği

$$\frac{d^2u_0(t)}{dt^2} = -u_0(t) - 2u_0(t)^3 \tag{5.11}$$

yapısına bürünür. Bu eşitliğin her iki yanı $u_0(t)$'nin türevi ile çarpılırsa bazı ara işlemlerden sonra

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{du_0(t)}{dt}\right)^2 = -\frac{d}{dt}\left(u_0(t)^2\right) - \frac{d}{dt}\left(u_0(t)^4\right) \tag{5.12}$$

yazılabilir. Buradan tümlevlemeyle C bir değişmez olmak üzere

$$\left(\frac{du_0(t)}{dt}\right)^2 = C - \left(u_0(t)^2\right) - \left(u_0(t)^4\right) \tag{5.13}$$

elde edilir. Bu denklemin çözümü değişkenlerin ayrılması yoluyla elde edilebilir. Bu amaçla, yukarıdaki denklem aşağıdaki biçimde yeniden yazılabilir.

$$\int_0^{u_0(t)} d\xi \frac{1}{\sqrt{C-\xi^2-\xi^4}} = t \tag{5.14}$$

Burada sol tarafta gözüken integral ξ üzerinde bir ölçekleme yaparak ve ölçekleme değiştirgenini uygun biçimde seçerek aşağıdaki türden bir eliptik integral haline dönüştürülebilir. Eğer, α ölçekleme değiştirgeni olmak üzere ξ yerine $\frac{\xi}{\alpha}$ yerleştirilecek olursa yukarıdaki denklem aşağıdaki biçime bürünür.

$$\int_0^{\alpha u_0(t)} d\xi \frac{1}{\sqrt{(1-\xi^2)\left(k'^2+k^2\xi^2\right)}} = \frac{kt}{\alpha} \tag{5.15}$$

Burada gözüken yeni değiştirgenlerin açık anlatımları aşağıda verilmektedir.

$$\alpha \equiv \frac{\sqrt{1+4C^2}+1}{2C^2} \tag{5.16}$$

$$k \equiv \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+2}} \tag{5.17}$$

$$k' \equiv \sqrt{1-k^2} \tag{5.18}$$

$u_0(t)$ için verilen son denklem aşağıdaki biçimde yeniden yazılabilir.

$$\int_{\alpha u_0(t)}^{1} d\xi \frac{1}{\sqrt{(1-\xi^2)\left(k'^2+k^2\xi^2\right)}} = K(k) - \frac{kt}{\alpha} \tag{5.19}$$

Buradaki yeni değiştirgen

$$K(k) \equiv \int_0^1 d\xi \frac{1}{\sqrt{(1-\xi^2)\left(k'^2+k^2\xi^2\right)}} \tag{5.20}$$

eşitliğiyle tanımlanmaktadır. Sondan bir önceki denklem Jacobi eliptik işlevleri türünden çözülebilir. Çözüm aşağıda verilmektedir.

$$u_0(t) = \frac{1}{\alpha} cn \left(K(k) - \frac{kt}{\alpha} \right) \tag{5.21}$$

Burada cn ile Jacobi eliptik işlevlerinden cos işlevine karşılık geleni anlatılmaktadır. Yukarıdaki çözüm artı değerli olması gerektiği kolayca gösterilebilen ama henüz belirlenmemiş olan C değiştirgenini içermektedir. Bunun belirlenmesi için kolayca gösterilebilecek olan $E_0(1) = 0$ gerçeğinden yararlanılabilir. Bu gerçek $u_0'(1) = 0$ anlamına ve son denklemden dolayı da aşağıdaki denkleme karşılık gelir.

$$cn' \left(K(k) - \frac{k}{\alpha} \right) = -sn \left(K(k) - \frac{k}{\alpha} \right) \tag{5.22}$$

Jacobi eliptik işlevleri devirli (peryodik) işlevlerdir. Dolayısıyla, son denklem, C için sayılabilir sonsuzlukta kök üretir. Yani çözüm çok katlıdır. Katlılık sayılabilir sonsuzluktadır. Burada bunların bulunması ile ilgili ayrıntılara girmeyip bu kadar bilgi ile yetineceğiz.

BÖLÜM 6

SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada incelenen uyumlu salınıcıya ait en iyilemeli denetim denklemleri doğrusal öngörümler altında oluşturulmuş ve elde edilen eniyilemeli denetim denklemleri iki farklı yöntem ile çözülmüştür.

Bu yöntemlerden ilki olan saptırım açılımları yönteminde dış alan genliği üzerinden bir yapay değiştirgen kullanılarak saptırım açılımı yapılmış ve ψ dalga işlevi ile λ eşdüzey işlevinin sıfırıncı ve birinci basamaktan saptırım açılımı elde edilmiştir. Böylece sonuçta doğrusal tümlev denkleme ulaşılmıştır. Bu tümlev denklem dış alan genliği $\mathcal{E}(t)$'ye bağlı olarak yapılan bir dönüşüm aracılığıyla dördüncü basamaktan bir türevli denklem durumuna gelmiş ve bu türevli denklem taban alınarak bilinmeyen dış alan genliğinin yapısı belirlenmiştir. Daha sonra $\mathcal{E}(t)$ için elde edilen bu yapı tümlev denklemde yerine yerleştirilerek gerekli yalınlaştırmalar yapıldığında türevli denklemin sınır koşullarına ulaşılır. Böylece dördüncü basamaktan türevli denklem bulunan dört sınır koşulu altında rahatça çözülebilir hale gelmiştir.

Saptırım açılımı yöntemi kullanılarak elde edilen tümlev denklem güçsüz alan varsayımı altında çalışıldığından doğrusal olarak elde edilmesine karşın ikinci yöntem olarak incelenen işleçler cebri ile indirgeme yönteminde ise tümlev denklem doğrusal terimlerin yanı sıra doğrusal olmayan terimlerin de göründüğü denklem durumuna gelmiştir. Dolayısıyla, bu denklemin analitik olarak çözümü kolay değildir. Bu yüzden denklemlerdeki tüm bilinmeyenlerin içinde gözükmemesine karşın bağımlılığından sözedebileceğimiz T etkileşim süresine göre bir açılım yapılmıştır. Bu amaçla, öncelikle ağırlık işlevinin T'ye göre davranışı incelenmiş ve bu davranış gözönünde bulundurularak T'ye göre açılım yapılmış ve bu açılımın ilk baskın terimi dikkate alınmıştır. Bu açılım sonucu oluşan denklemlerin çözümünün Jacobi eliptik işlevleri türünden elde edilebileceği gösterilmiştir.

Elde edilen denklemlerin çözümü gelecekteki çalışmalar arasında öngörülmektedir. Ayrıca, dış alan genliği $\mathcal{E}(t)$'nin belirlenen bir ortalama etkin değeri üzerinden açılımı da olanaklıdır.

KAYNAKLAR

[1] M. Demiralp and H. Rabitz, Optimally controlled quantum molecular dynamics: A perturbation formulation and the existence of multiple solutions, Phys. Rev. A, **47**, 809 (1993).

[2] M. Demiralp and H. Rabitz, Optimally controlled quantum molecular dynamics: The effect of nonlinearities on the magnitude and multiplicity of control-field solutions, Phys. Rev. A, **47**, 831 (1993).

[3] P. Gross, D. Neuhauser, and H. Rabitz, Teaching lasers to control molecules in the presence of laboratory field uncertainty and measurement imprecision, J. Chem. Phys.,**98**, 4557 (1993).

[4] C.D. Schwieters and H. Rabitz, J. Phys.Chem., Optimal Molecular Control in the Harmonic Regime: The Methylene Halide Chemical Series and Fluorobenzene, **97**, 8864 (1993).

[5] M.Demiralp and H. Rabitz, Optimal Control of Classical Molecular Dynamics: A Perturbation Formulation and the Existence of Multiple Solutions, J. Math. Chem., **16**, 185 (1994).

[6] B. Tunga and M. Demiralp, Optimally Controlled Dynamics of One Dimensional Harmonic Oscillator: Linear Dipole Function and Quadratic Penalty, ANACM, **1**, 245 (2003).

[7] A. Kurşunlu and M.Demiralp, Optimal Control of One Dimensional Quantum Harmonic Oscillator Under an External Field With Quadratic Dipole Function and Penalty on Momentum: Construction of the Linearised Field Amplitude Integral Equation, ANACM, **1**, 277 (2003).

EKLER A

Evrim İşleçleri ile İndirgeme Yönteminde Denetim Denkleminin Çözümünü Sağlayan MuPAD Programı

```
   *----*    MuPAD 2.5.1 -- The Open Computer Algebra System
  /|   /|
 *----* |    Copyright (c)  1997 - 2002  by SciFace Software
 | *--|-*                   All rights reserved.
 |/   |/
 *----*      Licensed to:   Burcu Tunga

>> assume(t>0):
>> AH0:=matrix(6,6,[[0,0,0,0,0,0],[0,0,1,0,0,0],[0,-1,0,0,0,0],\
[0,0,0,0,1,0],[0,0,0,-2,0,2],[0,0,0,0,-1,0]]);

                         +-                     -+
                         |  0,  0, 0,  0,  0, 0  |
                         |                       |
                         |  0,  0, 1,  0,  0, 0  |
                         |                       |
                         |  0, -1, 0,  0,  0, 0  |
                         |                       |
                         |  0,  0, 0,  0,  1, 0  |
                         |                       |
                         |  0,  0, 0, -2,  0, 2  |
                         |                       |
                         |  0,  0, 0,  0, -1, 0  |
                         +-                     -+
>> Amu:=matrix(6,6,[[0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0],[-1,0,0,0,0,0],\
[0,0,0,0,0,0],[0,-2,0,0,0,0],[0,0,-2,0,0,0]]);

                         +-                     -+
                         |   0,  0,  0, 0, 0, 0  |
                         |                       |
                         |   0,  0,  0, 0, 0, 0  |
                         |                       |
                         |  -1,  0,  0, 0, 0, 0  |
                         |                       |
                         |   0,  0,  0, 0, 0, 0  |
                         |                       |
                         |   0, -2,  0, 0, 0, 0  |
                         |                       |
                         |   0,  0, -2, 0, 0, 0  |
                         +-                     -+
```

```
>> bmu:=matrix(6,1,[[0],[1],[0],[0],[0],[0]]);

                                  +-   -+
                                  |  0  |
                                  |     |
                                  |  1  |
                                  |     |
                                  |  0  |
                                  |     |
                                  |  0  |
                                  |     |
                                  |  0  |
                                  |     |
                                  |  0  |
                                  +-   -+

>> b0hat:=matrix(6,1,[[0],[0],[0],[1],[0],[0]]);

                                  +-   -+
                                  |  0  |
                                  |     |
                                  |  0  |
                                  |     |
                                  |  0  |
                                  |     |
                                  |  1  |
                                  |     |
                                  |  0  |
                                  |     |
                                  |  0  |
                                  +-   -+

>> b0hatprime:=matrix(6,1,[[0],[0],[0],[0],[0],[1]]);

                                  +-   -+
                                  |  0  |
                                  |     |
                                  |  0  |
                                  |     |
                                  |  0  |
                                  |     |
                                  |  0  |
                                  |     |
                                  |  0  |
                                  |     |
                                  |  1  |
                                  +-   -+

>> P:=matrix(6,6,[[0,0,0,0,0,0],[0,0,-1,0,0,0],[0,1,0,0,0,0],\
[0,0,0,0,-2,0],[0,0,0,2,0,-2],[0,0,0,0,2,0]]);
```

```
                        +-                         -+
                        |  0, 0,  0, 0,  0,  0  |
                        |                          |
                        |  0, 0, -1, 0,  0,  0  |
                        |                          |
                        |  0, 1,  0, 0,  0,  0  |
                        |                          |
                        |  0, 0,  0, 0, -2,  0  |
                        |                          |
                        |  0, 0,  0, 2,  0, -2  |
                        |                          |
                        |  0, 0,  0, 0,  2,  0  |
                        +-                         -+
>> q:=matrix(6,1,[[1],[0],[0],[1/2],[0],[1/2]]);

                             +-     -+
                             |   1   |
                             |       |
                             |   0   |
                             |       |
                             |   0   |
                             |       |
                             |  1/2  |
                             |       |
                             |   0   |
                             |       |
                             |  1/2  |
                             +-     -+
>> birim:=matrix(6,6,[[1,0,0,0,0,0],[0,1,0,0,0,0],\
[0,0,1,0,0,0],[0,0,0,1,0,0],[0,0,0,0,1,0],[0,0,0,0,0,1]]);
                         +-                    -+
                         |  1, 0, 0, 0, 0, 0  |
                         |                      |
                         |  0, 1, 0, 0, 0, 0  |
                         |                      |
                         |  0, 0, 1, 0, 0, 0  |
                         |                      |
                         |  0, 0, 0, 1, 0, 0  |
                         |                      |
                         |  0, 0, 0, 0, 1, 0  |
                         |                      |
                         |  0, 0, 0, 0, 0, 1  |
                         +-                    -+
>> ComAmuAH0:=Amu*AH0-AH0*Amu;

                         +-                    -+
                         |  0, 0, 0, 0, 0, 0  |
                         |                      |
                         |  1, 0, 0, 0, 0, 0  |
                         |                      |
                         |  0, 0, 0, 0, 0, 0  |
                         |                      |
                         |  0, 2, 0, 0, 0, 0  |
                         |                      |
                         |  0, 0, 2, 0, 0, 0  |
                         |                      |
                         |  0, 0, 0, 0, 0, 0  |
                         +-                    -+
```

```
>> ComAmuAH0kare:=ComAmuAH0*ComAmuAH0;

                                        +-                 -+
                                        |  0, 0, 0, 0, 0, 0  |
                                        |                    |
                                        |  0, 0, 0, 0, 0, 0  |
                                        |                    |
                                        |  0, 0, 0, 0, 0, 0  |
                                        |                    |
                                        |  2, 0, 0, 0, 0, 0  |
                                        |                    |
                                        |  0, 0, 0, 0, 0, 0  |
                                        |                    |
                                        |  0, 0, 0, 0, 0, 0  |
                                        +-                 -+
>> ComComAmuAH0AH0:=ComAmuAH0*AH0-AH0*ComAmuAH0;

                                        +-                 -+
                                        |  0, 0, 0, 0, 0, 0  |
                                        |                    |
                                        |  0, 0, 0, 0, 0, 0  |
                                        |                    |
                                        |  1, 0, 0, 0, 0, 0  |
                                        |                    |
                                        |  0, 0, 0, 0, 0, 0  |
                                        |                    |
                                        |  0, 2, 0, 0, 0, 0  |
                                        |                    |
                                        |  0, 0, 2, 0, 0, 0  |
                                        +-                 -+
>> K1:=exp(t*AH0);

    array(1..6, 1..6,
      (1, 1) = 1,
      (1, 2) = 0,
      (1, 3) = 0,
      (1, 4) = 0,
      (1, 5) = 0,
      (1, 6) = 0,
      (2, 1) = 0,

                         2 1/2                2 1/2
               exp((- t )    )   exp(- (- t )    )
      (2, 2) = -------------- + ----------------,
                      2                  2
                     2 1/2         2 1/2
                 (- t )    exp((- t )    )
      (2, 3) = - ----------------------- \
                           2 t
                     2 1/2             2 1/2
                 (- t )    exp(- (- t )    )
               + -------------------------,
                             2 t

      (2, 4) = 0,
      (2, 5) = 0,
      (2, 6) = 0,
      (3, 1) = 0,
```

```
                      2 1/2                 2 1/2
            t exp((- t )   )   t exp(- (- t )   )
(3, 2) = - ---------------- + ------------------,
                     2 1/2               2 1/2
               2 (- t )            2 (- t )
                  2 1/2               2 1/2
          exp((- t )   )   exp(- (- t )   )
(3, 3) = -------------- + ----------------,
                2                  2
(3, 4) = 0,
(3, 5) = 0,
(3, 6) = 0,
(4, 1) = 0,
(4, 2) = 0,
(4, 3) = 0,
         exp(-2 I t)   exp(2 I t)
(4, 4) = ----------- + ---------- + 1/2,
              4             4
(4, 5) = 1/4 I exp(-2 I t) - 1/4 I exp(2 I t),
           exp(-2 I t)   exp(2 I t)
(4, 6) = - ----------- - ---------- + 1/2,
                4             4
(5, 1) = 0,
(5, 2) = 0,
(5, 3) = 0,
(5, 4) = - 1/2 I exp(-2 I t) + 1/2 I exp(2 I t),
         exp(-2 I t)   exp(2 I t)
(5, 5) = ----------- + ----------,
              2             2
(5, 6) = 1/2 I exp(-2 I t) - 1/2 I exp(2 I t),
(6, 1) = 0,
(6, 2) = 0,
(6, 3) = 0,
           exp(-2 I t)   exp(2 I t)
(6, 4) = - ----------- - ---------- + 1/2,
                4             4
(6, 5) = - 1/4 I exp(-2 I t) + 1/4 I exp(2 I t),
         exp(-2 I t)   exp(2 I t)
(6, 6) = ----------- + ---------- + 1/2
              4             4
)
>> K:=matrix(6,6):
>> K[1,1]:=1:
>> K[1,2]:=0:
>> K[1,3]:=0:
>> K[1,4]:=0:
>> K[1,5]:=0:
>> K[1,6]:=0:
>> K[2,1]:=0:
>> K[2,2]:=rectform(K1[2,2]):
>> K[2,3]:=rectform(K1[2,3]):
>> K[2,4]:=0:
>> K[2,5]:=0:
>> K[2,6]:=0:
>> K[3,1]:=0:
>> K[3,2]:=rectform(K1[3,2]):
>> K[3,3]:=rectform(K1[3,3]):
>> K[3,4]:=0:
```

```
>> K[3,5]:=0:
>> K[3,6]:=0:
>> K[4,1]:=0:
>> K[4,2]:=0:
>> K[4,3]:=0:
>> K[4,4]:=rectform(K1[4,4]):
>> K[4,5]:=rectform(K1[4,5]):
>> K[4,6]:=rectform(K1[4,6]):
>> K[5,1]:=0:
>> K[5,2]:=0:
>> K[5,3]:=0:
>> K[5,4]:=rectform(K1[5,4]):
>> K[5,5]:=rectform(K1[5,5]):
>> K[5,6]:=rectform(K1[5,6]):
>> K[6,1]:=0:
>> K[6,2]:=0:
>> K[6,3]:=0:
>> K[6,4]:=rectform(K1[6,4]):
>> K[6,5]:=rectform(K1[6,5]):
>> K[6,6]:=rectform(K1[6,6]):
>> print(Unquoted, K);

+-                                                            -+
| 1,    0,       0,          0,          0,          0         |
|                                                              |
| 0,  cos(t), sin(t),        0,          0,          0         |
|                                                              |
| 0, -sin(t), cos(t),        0,          0,          0         |
|                                                              |
|                        cos(2t)+1    sin(2t)   -cos(2t)+1     |
| 0,    0,       0,      ---------,   -------,  ----------     |
|                            2            2          2          |
|                                                              |
| 0,    0,       0,      -sin(2t),    cos(2t),   sin(2t)       |
|                                                              |
|                       -cos(2t)+1     sin(2t)   cos(2t)+1     |
| 0,    0,       0,    ----------, -  -------,   ---------      |
|                            2            2          2          |
+-                                                            -+

>> kareAmu:=Amu*Amu;

                          +-                    -+
                          |  0, 0, 0, 0, 0, 0    |
                          |                      |
                          |  0, 0, 0, 0, 0, 0    |
                          |                      |
                          |  0, 0, 0, 0, 0, 0    |
                          |                      |
                          |  0, 0, 0, 0, 0, 0    |
                          |                      |
                          |  0, 0, 0, 0, 0, 0    |
                          |                      |
                          |  2, 0, 0, 0, 0, 0    |
                          +-                    -+

>> euzUtAmu:=birim-U*Amu+(U^2*Amu^2/2);
```

```
                             +-                      -+
                             |   1,  0,   0,  0, 0, 0  |
                             |                         |
                             |   0,  1,   0,  0, 0, 0  |
                             |                         |
                             |   U,  0,   1,  0, 0, 0  |
                             |                         |
                             |   0,  0,   0,  1, 0, 0  |
                             |                         |
                             |   0, 2 U,  0,  0, 1, 0  |
                             |                         |
                             |   2                     |
                             |  U ,  0,  2 U, 0, 0, 1  |
                             +-                      -+
>> kareComAmuAH0:=ComAmuAH0*ComAmuAH0*ComAmuAH0;

                               +-                  -+
                               |  0, 0, 0, 0, 0, 0  |
                               |                    |
                               |  0, 0, 0, 0, 0, 0  |
                               |                    |
                               |  0, 0, 0, 0, 0, 0  |
                               |                    |
                               |  0, 0, 0, 0, 0, 0  |
                               |                    |
                               |  0, 0, 0, 0, 0, 0  |
                               |                    |
                               |  0, 0, 0, 0, 0, 0  |
                               +-                  -+
>> euzVtComAmuAH0:=birim-V*ComAmuAH0+(V^2*ComAmuAH0^2/2);

                            +-                        -+
                            |   1,   0,    0,  0, 0, 0  |
                            |                           |
                            |  -V,   1,    0,  0, 0, 0  |
                            |                           |
                            |   0,   0,    1,  0, 0, 0  |
                            |                           |
                            |   2                       |
                            |  V , -2 V,   0,  1, 0, 0  |
                            |                           |
                            |   0,   0,  -2 V, 0, 1, 0  |
                            |                           |
                            |   0,   0,    0,  0, 0, 1  |
                            +-                        -+
>> R_s:=K*euzUtAmu*euzVtComAmuAH0;

array(1..6, 1..6,
  (1, 1) = 1,
  (1, 2) = 0,
  (1, 3) = 0,
  (1, 4) = 0,
  (1, 5) = 0,
  (1, 6) = 0,
  (2, 1) = - V cos(t) + U sin(t),
  (2, 2) = cos(t),
  (2, 3) = sin(t),
  (2, 4) = 0,
```

```
  (2, 5) = 0,
  (2, 6) = 0,
  (3, 1) = U cos(t) + V sin(t),
  (3, 2) = -sin(t),
  (3, 3) = cos(t),
  (3, 4) = 0,
  (3, 5) = 0,
  (3, 6) = 0,
  (4, 1) = - U*V*sin(2*t) + U^2*(- 1/2*cos(2*t) + 1/2)\
           + V^2*(1/2*cos(2*t) + 1/2),

                                 / cos(2 t)        \
  (4, 2) = U sin(2 t) - 2 V | -------- + 1/2 |,
                                 \     2           /
                                   /   cos(2 t)        \
  (4, 3) = - V sin(2 t) + 2 U | - -------- + 1/2 |,
                                   \       2           /
           cos(2 t)
  (4, 4) = -------- + 1/2,
               2
           sin(2 t)
  (4, 5) = --------,
               2
             cos(2 t)
  (4, 6) = - -------- + 1/2,
                 2
                                     2              2
  (5, 1) = - 2 U V cos(2 t) + U  sin(2 t) - V  sin(2 t),
  (5, 2) = 2 U cos(2 t) + 2 V sin(2 t),
  (5, 3) = - 2 V cos(2 t) + 2 U sin(2 t),
  (5, 4) = -sin(2 t),
  (5, 5) = cos(2 t),
  (5, 6) = sin(2 t),
                                2 / cos(2 t)        \
  (6, 1) = U V sin(2 t) + U  | -------- + 1/2 | \
                                  \     2           /
        2 /   cos(2 t)        \
           + V  | - -------- + 1/2 |,
                \       2           /
                                   /   cos(2 t)        \
  (6, 2) = - U sin(2 t) - 2 V | - -------- + 1/2 |,
                                   \       2           /
                                 / cos(2 t)        \
  (6, 3) = V sin(2 t) + 2 U | -------- + 1/2 |,
                                 \     2           /
             cos(2 t)
  (6, 4) = - -------- + 1/2,
                 2
             sin(2 t)
  (6, 5) = - --------,
                 2
           cos(2 t)
  (6, 6) = -------- + 1/2
               2
)

>> R_s_T:=subs(R_s,t=T):
>> R_s_T:=subs(R_s_T,U=UT):
```

```
>> R_s_T:=subs(R_s_T,V=VT);

array(1..6, 1..6,
  (1, 1) = 1,
  (1, 2) = 0,
  (1, 3) = 0,
  (1, 4) = 0,
  (1, 5) = 0,
  (1, 6) = 0,
  (2, 1) = - VT cos(T) + UT sin(T),
  (2, 2) = cos(T),
  (2, 3) = sin(T),
  (2, 4) = 0,
  (2, 5) = 0,
  (2, 6) = 0,
  (3, 1) = UT cos(T) + VT sin(T),
  (3, 2) = -sin(T),
  (3, 3) = cos(T),
  (3, 4) = 0,
  (3, 5) = 0,
  (3, 6) = 0,
  (4, 1) = - UT*VT*sin(2*T) + UT^2*(- 1/2*cos(2*T) + 1/2)\
           + VT^2*(1/2*cos(2*T) + 1/2),

                                   / cos(2 T)       \
  (4, 2) = UT sin(2 T) - 2 VT | -------- + 1/2 |,
                                   \     2          /
                                     /   cos(2 T)       \
  (4, 3) = - VT sin(2 T) + 2 UT | - -------- + 1/2 |,
                                     \       2          /
           cos(2 T)
  (4, 4) = -------- + 1/2,
               2
           sin(2 T)
  (4, 5) = --------,
               2
             cos(2 T)
  (4, 6) = - -------- + 1/2,
                 2
                                    2              2
  (5, 1) = - 2 UT VT cos(2 T) + UT  sin(2 T) - VT  sin(2 T),
  (5, 2) = 2 UT cos(2 T) + 2 VT sin(2 T),
  (5, 3) = - 2 VT cos(2 T) + 2 UT sin(2 T),
  (5, 4) = -sin(2 T),
  (5, 5) = cos(2 T),
  (5, 6) = sin(2 T),
  (6, 1) = UT*VT*sin(2*T) + UT^2*(1/2*cos(2*T) + 1/2)\
           + VT^2*(- 1/2*cos(2*T) + 1/2),

                                     /   cos(2 T)       \
  (6, 2) = - UT sin(2 T) - 2 VT | - -------- + 1/2 |,
                                     \       2          /
                                   / cos(2 T)       \
  (6, 3) = VT sin(2 T) + 2 UT | -------- + 1/2 |,
                                   \     2          /
             cos(2 T)
  (6, 4) = - -------- + 1/2,
                 2
```

```
              sin(2 T)
  (6, 5) = - --------,
                 2
            cos(2 T)
  (6, 6) = -------- + 1/2
               2
)

>> R_s_tau:=subs(R_s,t=tau):
>> R_s_tau:=subs(R_s_tau,U=Utau):
>> R_s_tau:=subs(R_s_tau,V=Vtau);

array(1..6, 1..6,
  (1, 1) = 1,
  (1, 2) = 0,
  (1, 3) = 0,
  (1, 4) = 0,
  (1, 5) = 0,
  (1, 6) = 0,
  (2, 1) = - Vtau cos(tau) + Utau sin(tau),
  (2, 2) = cos(tau),
  (2, 3) = sin(tau),
  (2, 4) = 0,
  (2, 5) = 0,
  (2, 6) = 0,
  (3, 1) = Utau cos(tau) + Vtau sin(tau),
  (3, 2) = -sin(tau),
  (3, 3) = cos(tau),
  (3, 4) = 0,
  (3, 5) = 0,
  (3, 6) = 0,
  (4, 1) = - Utau*Vtau*sin(2*tau) + Utau^2*(- 1/2*cos(2*tau)\
           + 1/2) + Vtau^2*(1/2*cos(2*tau) + 1/2),

                                    / cos(2 tau)       \
  (4, 2) = Utau sin(2 tau) - 2 Vtau | ---------- + 1/2 |,
                                    \     2            /
                                      /   cos(2 tau)       \
  (4, 3) = - Vtau sin(2 tau) + 2 Utau | - ---------- + 1/2 |,
                                      \       2            /
           cos(2 tau)
  (4, 4) = ---------- + 1/2,
               2
           sin(2 tau)
  (4, 5) = ----------,
               2
             cos(2 tau)
  (4, 6) = - ---------- + 1/2,
                 2
                                                2
  (5, 1) = - 2 Utau Vtau cos(2 tau) + Utau  sin(2 tau)\
                 2
           - Vtau  sin(2 tau),
  (5, 2) = 2 Utau cos(2 tau) + 2 Vtau sin(2 tau),
  (5, 3) = - 2 Vtau cos(2 tau) + 2 Utau sin(2 tau),
  (5, 4) = -sin(2 tau),
  (5, 5) = cos(2 tau),
  (5, 6) = sin(2 tau),
```

```
  (6, 1) = Utau*Vtau*sin(2*tau) + Utau^2*(1/2*cos(2*tau) + 1/2)\
           + Vtau^2*(- 1/2*cos(2*tau) + 1/2),

                                           /   cos(2 tau)       \
  (6, 2) = - Utau sin(2 tau) - 2 Vtau | - ---------- + 1/2 |,
                                           \       2            /
                                         / cos(2 tau)       \
  (6, 3) = Vtau sin(2 tau) + 2 Utau | ---------- + 1/2 |,
                                         \      2           /
             cos(2 tau)
  (6, 4) = - ---------- + 1/2,
                  2
             sin(2 tau)
  (6, 5) = - ----------,
                  2
           cos(2 tau)
  (6, 6) = ---------- + 1/2
                2
)

>> ilkterim:=simplify((linalg::transpose(b0hat))*R_s_T*\
     P*(linalg::transpose(R_s))*bmu);

+-                                                        -+
| UT cos(t) + VT sin(t) - UT cos(2T - t) -  VT sin(2T - t)|
+-                                                        -+
>> ikinciterim:=simplify((linalg::transpose(b0hatprime))*\
                R_s_tau*q*(linalg::transpose(b0hatprime))*\
                R_s_tau*P*(linalg::transpose(R_s))*bmu);

array(1..1, 1..1,
  (1, 1) = (Utau*cos(t) + Vtau*sin(t) + Utau*cos(t - 2*tau)\
           - Vtau*sin(t - 2*tau))*(1/2*Utau^2 + 1/2*Vtau^2\
           + Utau*Vtau*sin(2*tau) + 1/2*Utau^2*cos(2*tau)\
           - 1/2*Vtau^2*cos(2*tau) + 1/2)
)

>> quit
```

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında İstanbul'da doğdu. Orta ve lise eğitimini Davutpaşa Lisesi'nde tamamladı. 2000 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Matematik Mühendisliği Bölümü'nü bitirdi. 2001 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Bilişim Enstitüsü Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Programı'nda Yüksek Lisans Programı'na başladı. Halen bu programda eğitimini sürdürmektedir.